LÖSNINGAR

Kurskod: MVE425a

LINDHOLMEN 25 OKTOBER 2016

Hjälpmedel: Inga

Betygsgränser: $20 - 31 \Rightarrow 3$; $32 - 41 \Rightarrow 4$; $42 - 50 \Rightarrow 5$

1. (a) Beskriv de fyra talmängderna som vi arbetat med under denna kurs. (4p)

   (b) Vilket tal är det senast tillskottet till den talmängd ovan som ingår som delmängd i alla de tre övriga talmängderna? (1p)

   (c) I vilket land introducerades (upptäcktes/uppfanns) detta tal för första gången. (1p)

   Lösningsskiss:

   (a)

$$\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\} \subset \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} \subset \mathbb{Q} = \{p/q : p, q \in \mathbb{Z} \text{ och } q \neq 0\} \subset$$

$$\subset \mathbb{R} = \text{ alla decimaltal inklusive de med oändlig decimalutveckling.}$$

   (b) 0

   (c) Indien

2. Faktorisera följande tal och uttryck så långt det går!

   (a) 1024 (2p)

   (b) 1023 (3p)

   (c) $x^6 - 1$ (4p)

   Lösningsskiss:

   (a) $1024 = 2 \cdot 512 = 2 \cdot 2 \cdot 256 = \ldots = 2^{10}$

   (b) $1023 =$ [siffersumman, 6, är delbar med 3] $= 3 \cdot 341 =$ [testning av $5, 7, 11$ ger] $= 3 \cdot 11 \cdot 31$

   (c) $x^6 - 1 = (x^3)^2 - 1^2 = (x^3 + 1)(x^3 - 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$

3. Lös följande ekvationssystem

   (a)

$$\begin{cases} 3x - 2y &= 3 \\ 4x - 8y &= 2 \end{cases}$$

   (3p)

   (b)

$$\begin{cases} 4x - 3y &= 5 \\ 21y - 28x &= -35 \end{cases}$$

   (3p)

   Lösningsskiss:

(a)

$$\begin{cases} 3x-2y &= 3 \\ 4x-8y &= 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-\frac{2}{3}y &= 1 \\ 4x-8y &= 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-\frac{2}{3}y &= 1 \\ 0+\frac{16}{3}y &= 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= \frac{5}{4} \\ y &= \frac{6}{16}=\frac{3}{8} \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 4x-3y &= 5 \\ 21y-28x &= -35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x-3y &= 5 \\ 4x-3y &= 5 \end{cases}$$

Vilket ger oändligt många lösningar av formen

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= \frac{4t-5}{3} \end{cases}$$

för ett godtyckligt $t \in \mathbb{R}$.

4. Ge lösningsmängden för följande dubbelolikhet

$$|x-1| \leq |x-2| \leq |x+3|.$$

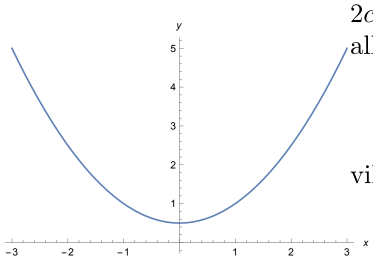
(4p)

Lösningsskiss:

Vänster olikhet, $|x-1| \leq |x-2|$, ger mängden av de x som är närmare punkten 1 än punkten 2. Dvs $\{x : x \leq \frac{3}{2}\}$. På samma sätt fås lösningsmängde för högra olikheten, $|x-2| \leq |x+3|$, de x som är närmare punkten 2 än -3. Dvs $\{x : x \geq -\frac{1}{2}\}$. För att båda olikheterna ska vara uppfyllda gäller att $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

5. Skriv upp ekvationen och skissa en parabel med x-axeln som styrlinje och $(0,1)$ som brännpunkt. (4p)

Lösningsskiss: Eftersom avståndet 1 mellan styrlinjen och brännpunkten är $2c$, blir $c=\frac{1}{2}$ och vertex för parabeln ligger i punkten $(x_0, y_0) = (0, \frac{1}{2})$. Den allmänna formeln för en parabel är



$$y - y_0 = \frac{1}{4c}(x-x_0)^2$$

vilket ger att ekvationen för den sökta parabeln blir

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x^2 \text{ eller } y = \frac{x^2+1}{2}.$$

6. Ge de geometriska betydelserna av ekvationerna.

(a) $4y^2 = (2+x)(2-x)$ (2p)

(b) $2y^2 = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$ (2p)

(c) Beräkna positioner av eventuella skärningspunkter av de två geometriska objekten. (4p)

Lösningsskiss:

(a) $4y^2 = (2+x)(2-x) \Leftrightarrow \frac{x^4}{4} + y^2 = 1$, dvs en ellips med centrum i $(0,0)$ och med halvaxlarna 2 (i x-led) och 1.

(b) $2y^2 = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$, dvs en hyperbel med centrum i $(0,0)$ och skärning med x-axeln i $\pm\sqrt{2}$ och med asymptoterna $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}x$.

(c) Skärningspunkterna beskrivs av följande icke-linjära ekvationssystem.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 & = 1 \\ \frac{x^2}{2} - y^2 & = 1 \end{cases}$$

Genom att addera den första raden till den andra får vi

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 & = 1 \\ \frac{3x^2}{4} & = 2 \end{cases}$$

vilket vi kan omformulera radvis till

$$\begin{cases} y & = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \\ x & = \pm\sqrt{\frac{8}{3}} \end{cases}$$

genom att substituera in x-värdet från den andra raden i den första, får vi tillslut

$$\begin{cases} y & = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ x & = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}. \end{cases}$$

Genom att kombinera dessa värden får vi följande fyra skärningspunkter

$$(2\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (2\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}), (-2\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \text{ och } (-2\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}).$$

7. En onsdagskväll i oktober i början på sextiotalet, satt ingenjör Olsson på Västerås stadshotell och åt en förrätt med tillhörande snaps. Snapsglasen på den tiden var nästan uteslutande formade som en kon med spetsen nedåt på en hög fot, så också detta glas. När han smuttat försiktigt på sin snaps tills ytnivån hade sjunkit till exakt halva ursprungsnivån mätt från glasets botten, bad han servitrisen, som han kallade fröken, att fylla upp glaset igen och addera en halv snaps på notan. Då en hel snaps kostade 2 kr, eller två riksdaler som ingenjör Olsson sa, hur mycket tjänade den sluge ingenjören på att bara betala halva priset för påfyllningen?[1] (5p)

   Lösningsskiss: Ursprungsvolymen är

$$V_u = \frac{Bh}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3},$$

   där r är radien av toppen av glaset och h höjden av spetsen av konen upp till toppen av glaset. När halva glaset är uppdrucket är den återstående volymen

$$V_{\text{å}} = \frac{\pi(\frac{r}{2})^2\frac{h}{2}}{3} = \frac{V_u}{8}.$$

   För den av servitrisen adderade volymen av $\frac{7}{8}V_u$ borde ingenjör Olsson ha betalat $2 \cdot \frac{7}{8}$ kr $= 1.75$ kr, så han tjänade alltså 75 öre på affären - vilket var mycket pengar på den tiden.

8. Formulera och bevisa Faktorsatsen. (4p)

9. Formulera och bevisa Pythagoras sats. (4p)

[1] Dagens ingenjörer kallar inte vår valuta för riksdaler, kallar inte serveringspersonal för "fröken" och blir själv inte tilltalade med titeln "ingenjör". Men framförallt - och detta är viktigt - dricker de inte snaps på något stadshotell alls mitt i veckan och tur är väl det. Allt var minsann inte bättre förr.