LÖSNINGAR
Kurskod: MVE425a
LINDHOLMEN 21 DECEMBER 2016
Tid: 8.30 – 12.30
Telefonvakt: Torbjörn, 031-772 3503
Inga hjälpmedel
Betygsgränser: $20-31 \Rightarrow 3$; $32-41 \Rightarrow 4$; $42-50 \Rightarrow 5$
Examinator: Torbjörn Lundh

1. Beskriv de tre olika bevistyperna som introducerats i kursen. Förklara särskilt skillnaderna mellan dem.

   Lösningsskiss: Se sidorna tio och elva i boken.

2. Förenkla följande uttryck så långt det går!

   (a)
   $$\frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$$

   (b)
   $$\frac{(x-y)^3}{x^2-y^2}-\frac{2x(x-y)}{x+y}+x-y.$$

   Lösningsskiss:

   (a)
   $$\frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=a.$$

   (b)
   $$\frac{(x-y)^3}{x^2-y^2}-\frac{2x(x-y)}{x+y}+x-y=0.$$

3. Lös följande ekvationssystem

   (a)
   $$\begin{cases} 2x-3y &= 2 \\ 4x-5y &= 5 \end{cases}$$

   (b)
   $$\begin{cases} 2x-3y-3z &= 2 \\ 4x-5y+z &= 5 \\ 4x-5y-z &= 4 \end{cases}$$

   Lösningsskiss:

   (a)
   $$\begin{cases} 2x-3y &= 2 \\ 4x-5y &= 5 \end{cases}$$
   $$\begin{cases} x &= \frac{5}{2} \\ y &= 1 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 2x - 3y - 3z & = 2 \\ 4x - 5y + z & = 5 \\ 4x - 5y - z & = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & = -2 \\ \quad y & = -\frac{5}{2} \\ \qquad z & = \frac{1}{2} \end{cases}$$

4. Ge lösningsmängden för följande olikhet

$$|x|x \leq 16$$

Lösningsskiss:

$$|x|x = \begin{cases} x^2 & \text{då } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{då } x < 0. \end{cases}$$

Det vill säga, $x|x| \leq 16$ om och endast om $x \leq \sqrt{16} = 4$.

5. (a) Skriv upp ekvationen av en ellips med centrum i punkten $(1, 1)$ och med en storaxel parallell med x-axeln med längd 4 och en lillaxel med längd 2.

   (b) Ange punkter för eventuella skärningar av y-axeln med ellipsen.

   Lösningsskiss: En ellips centrerad i origo med en horisontell storaxel av längd 4 och en lillaxel av längd 2 har ekvationen

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1.$$

   Vi kan flytta denna ellips till att ha centrum i $(1, 1)$ genom följande omskrivning

$$\frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1.$$

   Skärningen med y-axeln fås genom att sätta $x = 0$ i ekvationen ovan. Detta leder till punkterna $(0, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$ och $(0, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$.

6. Hur lång blir limfogen (i cm) och mycket papper (i enheten cm^2) går det åt för att tillverka en stjärngossestrut (om vi kan bortse ifrån överlappet i limfogen) med öppningsradien 8 cm och med höjden 31 cm. Förenkla ditt svar, men räkna exakt.

   Lösningsskiss: Genom att utnyttja Pythagoras sats får vi att imfogens längd är $s = \sqrt{r^2 + h^2} cm$. Mantelytan får vi då som $\pi r \sqrt{r^2 + h^2}$ där r är öppningsradien och h är höjden av konen. Genom insättning av r =8 cm och h = 31 cm får vi att limfogen får längd $\sqrt{1025} = \sqrt{25 \cdot 41} = 5\sqrt{41}$ cm och att mantelytan blir då $40\pi\sqrt{41}$ cm^2.

7. Antag att vi spänner en stålvajer runt jorden längs ekvatorn. Om vi sedan klipper av den och (med hjälp av två sk vajerlås) skarvar på en extra meter och lyfter upp hela den förlängda vajern jämnt från jordskorpan alternativt havsytan, hur högt lyfter vi då denna nya längre vajer? (Observera att vi inte lyfter i en enda punkt utan med samma höjd för hela vajern.)

Lösningsskiss: Låt Ω m vara jordens omkrets längs ekvatorn och R jordradien. Då har vi att $2\pi R = \Omega$. Om vi nu lägger till en meter i omkrets så kan vi fråga vilken höjd, h, vi då kommer att kunna lyfta jämnt över jordytan? Detta kan vi uttrycka som $2\pi(R + h) = \Omega + 1$. Löser vi denna ekvation för höjden h får vi att

$$h = \frac{1}{2\pi} \text{ m.}$$

8. Formulera och bevisa Faktorsatsen.

9. Formulera och bevisa lösningsformeln (den så kallade pq-formeln) för en allmän andragradsekvation.