LÖSNINGAR

Kurskod: MVE425a

Tid: 8.30 – 12.30

LINDHOLMEN 24 OKTOBER 2017

Telefonvakt: Torbjörn Lundh, 0709847070

Hjälpmedel: pennor, radergummi och linjal.

Betygsgränser: $20 - 31 \Rightarrow 3$; $32 - 41 \Rightarrow 4$; $42 - 50 \Rightarrow 5$

1. (a) Namnge fyra delmängder till mängden av alla fyrhörningar. (2p)

   (b) Ange grafiskt hur dessa delmängder förhåller sig till varandra. Är till exempel någon av dessa delmängder innehållen i någon av de andra delmängderna av fyrhörningar? (2p)

   (c) Ge definitionerna för dessa delmängder. (2p)

   Lösningsskiss: Se till exempel boken sidorna 71 och 72.

2. Förenkla följande uttryck så långt det går!

   (a)
   $$3(t-3)^2 - 2(t-1)^2 + 2(t+1)^2 - 3(t+3)^2$$
   (3p)

   (b)
   $$\frac{\frac{x}{2}+\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4}}.$$
   (3p)

   Lösningsskiss:

   (a) $-28t$

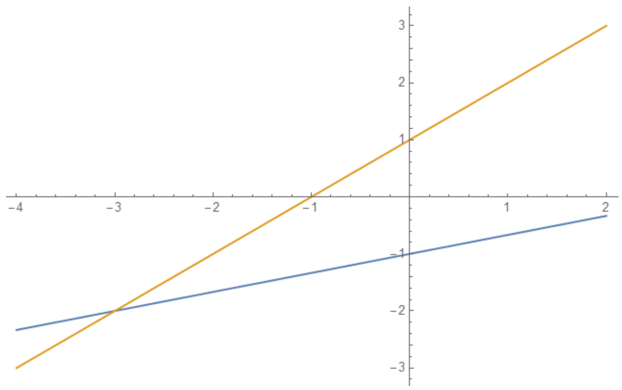
   (b) $2x$.

3. (a) Lös följande ekvationssystem
   $$\begin{cases} x - 3y &= 3 \\ 15x - 15y &= -15 \end{cases}$$
   (4p)

   (b) Illustrera grafiskt ekvationssystemet och dess lösning med en skiss i ett koordinatsystem. (4p)

   Lösningsskiss:

   (a)
   $$\begin{cases} x - 3y &= 3 \\ 15x - 15y &= -15 \end{cases}$$
   Vi kan först dividera den andra ekvationen med 15 för att förenkla för oss
   $$\begin{cases} x - 3y &= 3 \\ x - y &= -1 \end{cases}$$



vilket efter några elementära radoperationer att

$$\begin{cases} x \qquad\quad = -3 \\ \qquad\quad y = -2 \end{cases}$$

(b) Se figuren där den bruna linjen representerar den andra ekvationen och där lösningens geometriska betydelse är skärningspunkten mellan linjerna.

4. Ge lösningsmängden för följande olikhet

$$|x-1| > 2|x-2|.$$

(4p)

Lösningsskiss: Vi delar upp tallinjen i tre intervall: $(-\infty, 1), [1, 2)$ och $[2, \infty)$. I det vänstra intervallet saknas det lösningar, i mittenintervallet är $x > \frac{5}{3}$ en lösning och i högra intervallet är $x < 3$ en lösning. Tillsamman får vi att lösningsmängden är $(\frac{5}{3}, 3)$.

5. Låt

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3 + 2x^2}}{x}.$$

(a) Vilka värden på x är tillåtna för $f(x)$? (2p)

(b) Förenkla $f(x)$. (2p)

(c) Skissa[1] kurvan $y = f(x)$. (3p)

Lösningsskiss:

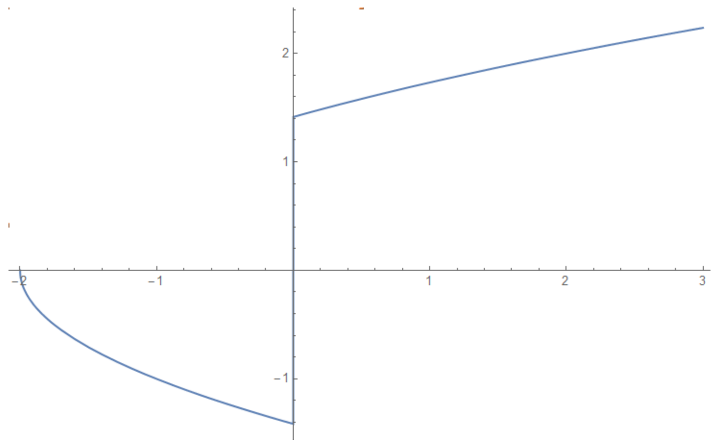
(a) De tillåtna värdena på x är de som ger ett positivt värde under rottecknet samt skilt ifrån noll då vi inte kan ha noll i nämnaren. Dvs $x \geq -2$ och $x \neq 0$.

(b) Genom att faktorisera ut x^2 under rottecknet och notera att $\sqrt{x^2} = |x|$, se också den norrländska ledningen längst ned i tentatesen, får vi att

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3 + 2x^2}}{x} = \frac{|x|}{x}\sqrt{x+2}.$$

(c) Vi ser att grafen blir $y = \sqrt{x+2}$ då $x > 0$ och $y = -\sqrt{x+2}$ då $x < 0$. Grafen blir då "bruten", se figuren.

[1] Eller måla, om ni envisas med att säga så.



6. Vad är arean av den minsta rektangel som täcker följande kurva i xy-planet?

$$9x^2 - 18x + y^2 - 4y + 4 = 0.$$

(4p)

Lösningsskiss: Genom kvadratkomplettering för både x och y får vi att kurvan kan skrivas som

$$(x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1.$$

Dvs, en ellips med centrum i $(1, 2)$ och med a-värde 1 och b-värde 2. Det vill säga, den minsta rektangeln som täcker kurvan har bredd $2a = 2$ och höjd $2b = 6$ l.e. Så denna minsta rektangel har en area av 12 areaenheter.

7. En konstruktör av tävlingssegelbåtar, Petra Pellesson, är intresserad av att veta hur bra båten går i lätta byiga vindar. Hon har därför tagit fram ett index som hon kallar racingindexet, R, som med hjälp av Newtons andra lag ska ge en indikation på hur bra båten kan accelerera och som hon definierade som kraften genom massan. Vi kan anta att den lilla båten har samma densitet som den stora och att kraften är proportionell mot segelytan.

   (a) Hur förändras R med längdskalan S om man vill jämföra en liten modellbåt med den slutgiltiga riktiga båten? (4p)

   (b) Mer specifikt, vad blir kvoten av racingindexen för enfotsmodellen och den verkliga trettiofotsbåten? (2p)

Lösningsskiss:

(a) Eftersom $R = \frac{F}{m}$ där kraften är proportionell mot segleytan, dvs $F = kA$ för någon konstant k och där A är segelarean och där massan är proportionell mot volymen, $m = \rho V$, har vi att

$$R = \frac{kA}{\rho V}.$$

Volymskalan är kuben på längdskalan och areaskalan är kvadraten på längdskalan S. Längdskalan är kvoten av längder i modellen genom längder i föremålet, $S = \frac{L_m}{L_f}$. Detta ger att racingindexet av modellen är

$$R_m = \frac{kA_m}{\rho V_m} = \frac{kS^2 A_f}{\rho S^3 V_f} = \frac{1}{S}\frac{kA_f}{\rho V_f} = \frac{1}{S} R_f.$$

(b) Här är längdskalan $S = \frac{1}{30}$ vilket enligt ovan ger

$$\frac{R_m}{R_f} = \frac{1}{S} = 30.$$

8. Formulera och bevisa **faktorsatsen**. (5p)

9. Härled parabelns ekvation med brännpunkt i $(0, c)$ och styrlinje $y = -c$. (4p)