LÖSNINGAR
Kurskod: MVE425a
LINDHOLMEN DECEMBER 2017
Tid: 8.30 – 12.30
Hjälpmedel: pennor, radergummi och linjal
Betygsgränser: $20-31 \Rightarrow 3$; $32-41 \Rightarrow 4$; $42-50 \Rightarrow 5$
Examinator: Torbjörn Lundh

1. Som du vet är kuber tredimensionella kroppar som begränsas av sex sidor som alla är kvadrater.

   (a) Namnge fyra generaliseringar av kuber till andra typer av tredimensionella kroppar. (2p)

   (b) Ge definitioner för dessa övriga klasser av tredimensionella kroppar (4p)

   (c) Använd en mängdoperator (vilken?) för att beskriva alla dessa fem klassers inbördes hierarki. (1p)

   Lösningsskiss:

   $$\text{kub} \subset \text{rätblock} \subset \text{parallellepiped} \subset \ \text{prisma} \subset \text{polyeder}.$$

   För de enskilda definitionerna, se sidan 107 i boken.

2. (a) Utför följande polynomdivision

   $$\frac{2x^3+3x^2-7x+4}{x^2+2x-3}.$$

   (3p)

   (b) Förenkla följande uttryck så långt det går!

   $$\frac{2a-b}{a^2+ab} - \frac{2ab-a}{b^2+ab} + \frac{a-b}{ab}.$$

   (3p)

   Lösningsskiss:

   (a)
   $$\frac{2x^3+3x^2-7x+4}{x^2+2x-3} = 2x-1+\frac{x+1}{x^2+2x-3}.$$

   (b)
   $$\frac{2(a-b)}{ab} + \frac{2(1-a)}{a+b}.$$

3. Lös följande ekvationssystem

   $$\begin{cases} 2x-y-z & = 4 \\ x-2y-z & = -1 \\ 2x-2y-z & = 1 \end{cases}$$

   (4p)

Lösningsskiss:

$$\begin{cases} x & = 2 \\ \quad y & = 3 \\ \qquad z & = -3 \end{cases}$$

4. Lös ekvationen

$$|x-1|+|x-2|=3.$$

(4p)

Lösningsskiss: Vi kan antingen dela upp tallinjen i tre delar avgränsade av brytpunkterna $x = 1$ och $x = 2$ och lösa de tre olika ekvationerna i de tre separat intervallen för att få de två lösningarna $x_1 = 0$ och $x_2 = 3$, eller också kan vi tolka ekvationen som att vi söker punkter på tallinjen vars summa av avstånden till punkterna 1 och 2 tillsammans ger 3. Eftersom avståndet melland dessa punkter är ett, så finns lösningar antingen ett steg till vänster om punkten 1 eller ett steg till höger om punkten 2. Med andra ord lösningarna $x_1 = 0$ och $x_2 = 3$.

5. Lös ekvationen

$$3-\sqrt{x-1}=\sqrt{4x+5}.$$

(4p)

Lösningsskiss: Genom att kvadrera båda leden, förenkla och kvadrera igen, får vi följande ekvation

$$4(x-1)=(x-1)^2,$$

vilket ger de två rötterna $x_1 = 5$ och $x_2 = 1$. Eftesom vi kvadrerade, måste vi kontrollera våra "lösningar" i ursprungsekvationen. Då finner vi att $x_1 = 5$ är en falsk rot, men att $x_2 = 1$ är en riktig rot.

6. (a) Rita kurvan $y = 2x^2$. (2p)
   (b) Vilken typ av kägelsnitt är detta? (1p)
   (c) Beskriv både i ord och i din skiss hur man geometriskt kan konstruera denna kurva utgående från avstånd från två enkla geometriska basobjekt. (2p)
   (d) Vad kallas dessa speciella geometriska objekt och var ligger de? (2p)
   (e) Ge ekvationen för den största cirkel med medelpunkt på den positiva y-axeln och som tangerar kurvan ovan endast i en punkt och skär inte kurvan i övrigt. (3p)
   (f) Vad kallas denna punkt? (1p)

Lösningsskiss: Kurvan är en parabel, $y - y_0 = k(x - x_0)^2$, med $k = 2$ och med vertex i $(x_0, y_0) = (0, 0)$. I och med att $k = \frac{1}{4c}$ har vi att $c = \frac{1}{8}$ och vi kan beskriva parabolen som alla punkter i planet som har lika lång till *brännpunkten* $(0, c) = (0, \frac{1}{8})$ som till *styrlinjen:* $y = -c = -\frac{1}{8}$. På grund av symmetriskäl, letar vi efter en cirkel med centrum i $(0, r)$ och med radie r som då tangerar parabeln endast i dess vertex och har inga andra skärningspunkter med parabeln. Med andra ord letar vi ett r som ger endast en lösning, nämligen $(0, 0)$, av följande icke-linjära ekvationssystem.

$$\begin{cases} y & = 2x^2 \\ x^2+(y-r)^2 & = r^2 \end{cases}$$

Genom att i andra ekvationen substituera in $x^2 = \frac{y}{2}$ från den första ekvationen, får vi

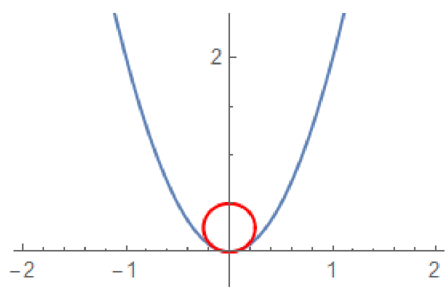
$$\frac{y}{2} + y^2 - 2yr + \cancel{r^2} = \cancel{r^2}.$$

Faktorisera ut ett y ger

$$y(y + \frac{1}{2} - 2r) = 0.$$

Nollfaktorsatsen ger då att antingen är $y = 0$ eller så är $y + \frac{1}{2} - 2r = 0$. Eftersom vi endast vill ha lösningen $y = 0$ får vi villkoret att $\frac{1}{2} = 2r$, eller med andra ord $r = \frac{1}{4}$. Om vi väljer ett $r > \frac{1}{4}$ kommer den cirkeln att också skära parabeln för ett $y > 0$. Ekvationen för denna röda cirkel, se figuren nedan, är då

$$x^2 + (y - \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}.$$



7. Hörnvinkeln hos en romb är 60°, där den långa diagonalen, med längd 1 m, skär randen.

   (a) Vad är rombens omkrets? (2p)

   (b) Vad är rombens yta? (4p)

   Lösningsskiss: Dela upp romben i fyra lika stora rätvinkliga trianglar begränsade av diagonalerna. Hypotenusan i en sådan triangel är rombens sidlängd, s, och den minsta vinkeln blir 30°. Detta ger att

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ = \frac{1/2}{s} = \frac{1}{2s}.$$

   Dvs $s = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Vi får då direkt att omkretsen blir $\frac{4}{\sqrt{3}}$. När det gäller arean så lägger vi ihop areorna av de fyra rätvinkliga trianglarna. Dvs

$$A = 4\frac{1}{2}s\sin 30^\circ s\cos 30^\circ = \frac{4}{2}s^2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}s^2.$$

8. Formulera och bevisa lösningsformeln (den så kallade pq-formeln) för en andragradsekvation på normalform. (4p)

9. Formulera och bevisa **randvinkelsatsen**. (4p)