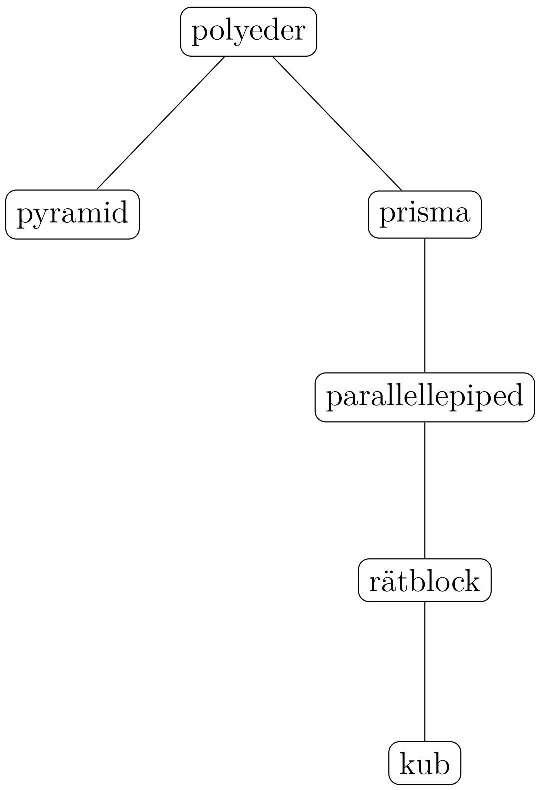
Lösningar för tenta i MVE425 Matematik, del A 2018-10-30 kl. 08:30–12:30

1. (a) **Svar:** En polyeder är en tredimensionell kropp som begränsas av plana ytor.

(b) Välj fyra av följande polyedrar:

- prisma
- pyramid
- kub
- rätblock
- parallellepiped

(c) **Svar:**



(d) Välj (minst) två av följande beskrivningar:

Prisma: Ett prisma är en tredimensionell kropp som begränsas av två likadana och parallella månghörningar (botten och lock), samt ett antal sidoytor vars kanter är parallella med varandra.

Pyramid: En pyramid är en tredimensionell kropp som begränsas av en månghörning (botten) samt ett antal triangulära sidoytor som alla möts i en gemensam spets.

Kub: En kub är en tredimensionell kropp som begränsas av sex lika stora kvadrater.

Rätblock: Ett rätblock är en tredimensionell kropp som begränsas av sex rektanglar.

Parallellepiped: En parallellepiped är en tredimensionell kropp vars sex begränsningsytor är parallellogram.

2. (a) *Alternativ 1:* Utveckling med hjälp av kvadreringsreglerna ger

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left((a+b)^2-(a-b)^2\right)= \\
&=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)\right)= \\
&=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2\right)= \\
&=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\cdot 4ab=\frac{a}{b}\cdot 4ab+\frac{b}{a}\cdot 4ab=4a^2+4b^2.
\end{aligned}
$$

Alternativ 2: Utveckling med hjälp av konjugatregeln ger

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left((a+b)^2-(a-b)^2\right)= \\
&=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left((a+b)+(a-b)\right)\left((a+b)-(a-b)\right)= \\
&=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\cdot 2a\cdot 2b=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\cdot 4ab= \\
&=\frac{a}{b}\cdot 4ab+\frac{b}{a}\cdot 4ab=4a^2+4b^2.
\end{aligned}
$$

Svar: Uttrycket blir $4a^2+4b^2$.

(b) Vi utför polynomdivision:

$$
\begin{array}{r|l}
 & = x^3 + 2x^2 - x - 3 \\
\hline
x^2+1 & x^5 + 2x^4 - x^2 \\
 & -(x^5 + x^3) \\
\cline{2-2}
 & 0 + 2x^4 - x^3 - x^2 \\
 & \quad -(2x^4 + 2x^2) \\
\cline{2-2}
 & \qquad - x^3 - 3x^2 \\
 & \qquad -(- x^3 - x) \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad - 3x^2 + x \\
 & \qquad\qquad -(- 3x^2 - 3) \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad x + 3
\end{array}
$$

Svar: Kvoten är x^3+2x^2-x-3 och resten är $x+3$.

3. (a) Låt x vara antalet stensoppar som Moa plockade, och låt y vara antalet citronslemskivlingar som morfar plockade. Eftersom moa plockade tre gånger så många citronslemskivlingar som morfar blev hennes svampskörd

$$x+3y=41.$$

Eftersom morfar plockade dubbelt så många stensoppar som Moa plockade blev hans svampskörd

$$2x+y=22.$$

Deras gemensamma svampskörd beskrivs då av det lineära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+3y=41 \\ 2x+\ \ y=22. \end{cases}$$

Svar: Svampskörden beskrivs av $\begin{cases} x+3y=41 \\ 2x+\ \ y=22 \end{cases}$, där x är antalet stensoppar som Moa plockade, och y är antalet citronslemskivlingar som morfar plockade.

(b) *Systemet från* (a)*:* Eliminationsmetoden ger

$$\begin{cases} x + 3y = 41 \\ 2x + y = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 41 \\ -5y = -60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 12. \end{cases}$$

Sammanlagt plockade de $x + 2x = 3x$ stensoppar, dvs 15 stycken.

Icke-svamp-systemet: Eliminationsmetoden ger

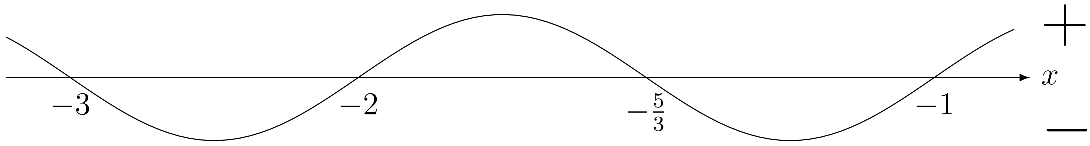
$$\begin{cases} 5x - 3y = 26 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3y = 26 \\ \dfrac{16}{5}y = -\dfrac{42}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \dfrac{145}{8} \\ y = -\dfrac{21}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{29}{8} \\ y = -\dfrac{21}{8}. \end{cases}$$

Svar: Ekvationssystemet i (a) har lösningen $\begin{cases} x = 5 \\ y = 12 \end{cases}$. Tillsammans plockade de 15 stensoppar. (Lösningen till det alternativa ekvationssystemet är $x = \frac{29}{8}$ och $y = -\frac{21}{8}$.)

4. Vi flyttar över allt till samma sida, sätter på gemensamt bråkstreck, och faktoriserar:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} > \frac{2}{x+3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x+3} &> 0 \quad \Leftrightarrow \\ \frac{(x+2)(x+3) + (x+1)(x+3) - 2(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} &> 0 \quad \Leftrightarrow \\ \frac{(x^2+5x+6) + (x^2+4x+3) - 2(x^2+3x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} &> 0 \quad \Leftrightarrow \\ \frac{3x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)} &> 0. \end{aligned}$$

Uttrycket i vänsterledet kommer att byta tecken i punkterna $x = -3$, $x = -2$, $x = -5/3$, samt $x = -1$. Eftersom vänsterledet är positivt ($= 5/6$) för $x = 0$ kan vi nu utan alltför stor möda rita upp följande förenklade teckentabell:



(OBS! Teckentabellen gör *inte* anspråk på att visa hur *grafen* ser ut!)

Svar: Olikheten gäller om $x < -3$ eller $-2 < x < -5/3$ eller $-1 < x$.

5. Först och främst gäller att $|1 - 3x| = |3x - 1|$, så vi kan skriva om ekvationen som $|3x - 1| + |5x + 1| = 8$. Vi börjar med att hitta brytpunkterna, $x = -\frac{1}{5}$ och $x = \frac{1}{3}$, för absolutbeloppen. Vi får tre olika fall att betrakta.

Om $x < -\frac{1}{5}$*:* Här får vi

$$-(3x - 1) - (5x + 1) = 8 \quad \Leftrightarrow \quad -8x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1,$$

som fungerar, eftersom den uppfyller $x < -\frac{1}{5}$.

Om $-\frac{1}{5} \le x < \frac{1}{3}$*:* Här får vi

$$-(3x - 1) + 5x + 1 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 2 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3,$$

som är en *falsk rot*, eftersom den inte uppfyller $-\frac{1}{5}x < \frac{1}{3}$.

Om $\frac{1}{3} \leq x$*:* Här får vi

$$3x - 1 + 5x + 1 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 8x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,$$

som fungerar, eftersom den uppfyller $\frac{1}{3} \leq x$.

Svar: Enda lösningarna till ekvationen är $x = -1$ och $x = 1$.

6. (a) Kraven som ställs för att uttrycket skall vara definierat är att $x^3 + x^2 \neq 0$ och $2x^7 - 6x^6 \geq 0$. För olikheten $2x^7 - 6x^6 \geq 0$ får vi

$$2x^7 - 6x^6 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^6(x-3) \geq 0,$$

som gäller precis då $x \geq 3$. Eftersom $x^3 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+1) = 0$ får inte $x = 0$ eller $x = -1$, men det inträffar ju ändå inte då $x \geq 3$.

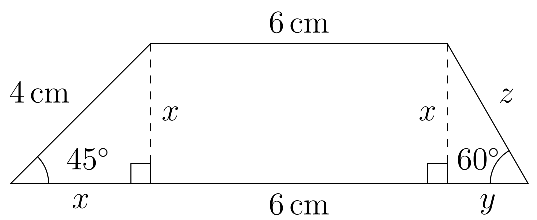
Svar: Uttrycket är definierat för alla $x \geq 3$.

(b) Eftersom $\sqrt{x^2} = |x|$ blir

$$\begin{aligned}\frac{|x|\sqrt{2x^7 - 6x^6}}{x^3 + x^2} &= \frac{|x|\sqrt{2x^6(x-3)}}{x^2(x+1)} = \frac{|x|\sqrt{x^6}\sqrt{2(x-3)}}{x^2(x+1)} = \\ &= \frac{|x|(\sqrt{x^2})^3\sqrt{2(x-3)}}{x^2(x+1)} = \frac{|x| \cdot |x|^3\sqrt{2(x-3)}}{x^2(x+1)} = \\ &= \frac{|x|^4\sqrt{2(x-3)}}{x^2(x+1)} = \frac{x^4\sqrt{2(x-3)}}{x^2(x+1)} = \frac{x^2\sqrt{2(x-3)}}{x+1}.\end{aligned}$$

Svar: Uttrycket förenklas till $\dfrac{x^2\sqrt{2(x-3)}}{x+1}$.

7. (a) Vi inför sträckorna x, y, och z enligt figuren:



Den rätvinkliga och liksidiga triangeln till vänster låter oss bestämma x. Pythagoras sats ger där att $x^2 + x^2 = 16\,\text{cm}^2 \Leftrightarrow x^2 = 8\,\text{cm}^2 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$. (Alternativt kan vi använda att $x = 4\sin(45°)\,\text{cm}$, som ger samma resultat.) I den rätvinkliga triangeln till höger får vi nu

$$\tan 60° = \frac{x}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{2}\,\text{cm}}{y} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\text{cm}$$

och

$$\sin 60° = \frac{x}{z} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{2}\,\text{cm}}{z} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\text{cm}$$

Trapetsens area ges nu av

$$\begin{aligned}A = x \cdot \frac{6\,\text{cm} + x + 6\,\text{cm} + y}{2} &= 2\sqrt{2} \cdot \frac{12 + 2\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{2}\,\text{cm}^2 = \\ &= \sqrt{2}\left(12 + 2\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\text{cm}^2 = \left(12\sqrt{2} + 4 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right)\text{cm}^2.\end{aligned}$$

Trapetsens omkrets blir

$$\begin{aligned} O &= 4\,\mathrm{cm} + 6\,\mathrm{cm} + z + y + 6\,\mathrm{cm} + x = \\ &= \left(16 + 2\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\mathrm{cm} = \\ &= \left(16 + 2\sqrt{2} + \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\mathrm{cm} = \left(16 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}\right)\mathrm{cm} \end{aligned}$$

Svar: Trapetsens area är $A = \left(12\sqrt{2} + 4 + \frac{4}{\sqrt{3}}\right)\mathrm{cm}^2$ och dess omkrets ges av $O = \left(16 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}\right)\mathrm{cm}$.

(b) Om längdskalan är S blir areaskalan S^2. Då arean blir dubbelt så stor måste $S^2 = 2$, dvs $S = \sqrt{2}$. Alla längder blir alltså $\sqrt{2}$ gånger så långa, så den nya omkretsen blir $\sqrt{2}\left(16 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}\right)\mathrm{cm} = \left(16\sqrt{2} + 4 + 4\sqrt{3}\right)\mathrm{cm}$.

Svar: Efters omskalningen blir omkretsen $\left(16\sqrt{2} + 4 + 4\sqrt{3}\right)\mathrm{cm}$.

8. Se boken, bevisförslagen på kurshemsidan, eller anteckningarna från föreläsning 10.

9. Se boken, bevisförslagen på kurshemsidan, eller anteckningarna från föreläsning 7.