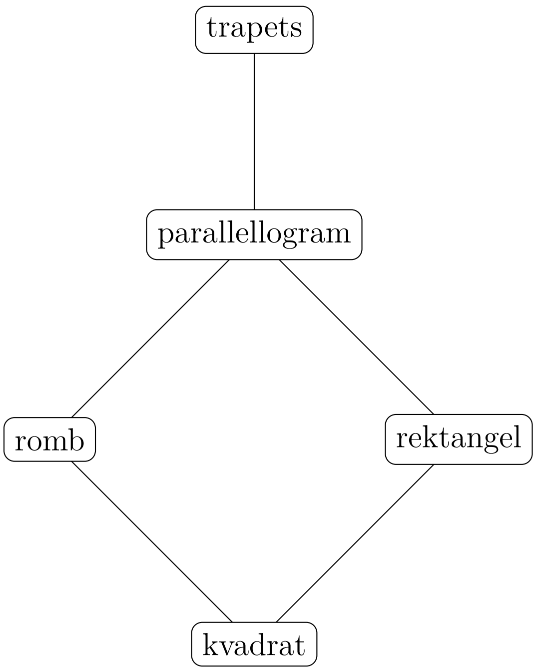
Lösningar för tenta i MVE425 Matematik, del A 2019-08-20 kl. 08:30–12:30

1. (a) **Svar:** Den skall begränsas enbart av linjestycken.

(b) Nämn fyra av följande:

- Kvadrat
- Rektangel
- Romb
- Trapets
- Parallellogram

(c) **Svar:** Parallellogram är specialfall av trapetser, romber och rektanglar är specialfall av parallellogram, och kvadrater är specialfall av både romber och rektanglar. (Endast fyra av de fem typerna behöver behandlas.)



(d) Ange minst två av nedanstående:

Kvadrat: En kvadrat har fyra lika långa sidor som möts i rätvinkliga hörn.

Rektangel: En rektangel är ett parallellogram där vinkeln i varje hörn är rät.

Romb: En romb är ett parallellogram vars fyra sidor alla är lika långa.

Trapets: En trapets är en fyrhörning där två motstående sidor är parallella.

Parallellogram: Ett parallellogram är en fyrhörning där varje sida är parallell med respektive motstående sida.

2. (a) Förlängning av huvudbråket med ab ger

$$\frac{\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}}{\frac{a-b}{b}+\frac{b}{a}} = \frac{ab(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a})}{ab(\frac{a-b}{b}+\frac{b}{a})} = \frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2} = \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2-ab+b^2} = a+b,$$

eftersom $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Svar: Uttrycket förenklas till $a+b$.

(b) Bestäm kvot och rest då $6x^4 + 26x^3 + 21x^2$ delas med $2x^2 + 2x - 1$. Vi utför polynomdivision:

$$
\begin{array}{r|l}
 & = 3x^2 + 10x \;+\; 2 \\
2x^2 + 2x - 1 & 6x^4 + 26x^3 + 21x^2 \\
 & -(6x^4 + \;\; 6x^3 - \;\; 3x^2) \\
 & \quad 0 \;+ 20x^3 + 24x^2 \\
 & \qquad -(20x^3 + 20x^2 - 10x) \\
 & \qquad\qquad\qquad 4x^2 + 10x \\
 & \qquad\qquad\quad -\;(4x^2 + \;\; 4x - 2) \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 6x + 2
\end{array}
$$

Svar: Kvoten är $3x^2 + 10x + 2$ och resten är $6x + 2$.

3. Kurvan $y = Ax^2 + Bx + C$ går genom punkterna $(-1, 4)$, $(1, 10)$, och $(2, 10)$.

(a) Första punkten ger oss ekvationen $4 = A(-1)^2 + B(-1) + C$, andra punkten ger $10 = A \cdot 1^2 + B \cdot 1 + C$, och den tredje ger $10 = A \cdot 2^2 + B \cdot 2 + C$.

Svar: Vi får följande lineära ekvationssystem för A, B, och C:

$$
\begin{cases}
A - \;\; B + C = \;\; 4 \\
A + \;\; B + C = 10 \\
4A + 2B + C = 10.
\end{cases}
$$

(b) Med hjälp av eliminationsmetoden får vi

$$
\begin{cases}
A - \;\; B + C = \;\; 4 \\
A + \;\; B + C = 10 \\
4A + 2B + C = 10
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
A - \;\; B + \;\; C = \;\; 4 \\
\quad 2B \qquad\quad = \;\; 6 \\
\quad 6B - 3C = -6
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
A - \;\; B + \;\; C = \;\; 4 \\
\quad 2B \qquad\quad = \;\; 6 \\
\qquad\quad 3C = 24
\end{cases}
\Leftrightarrow
$$

$$
\begin{cases}
A - B + C = 4 \\
\quad B \qquad = 3 \\
\qquad\quad C = 8
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
A = -1 \\
B = \;\; 3 \\
C = \;\; 8.
\end{cases}
$$

Svar: Ekvationssystemets lösning är $A = -1$, $B = 3$, och $C = 8$. (Kurvan ges alltså av $y = -x^2 + 3x + 8$.)

4. Vi flyttar över allt till samma sida, sätter på gemensamt bråkstreck, och faktoriserar:

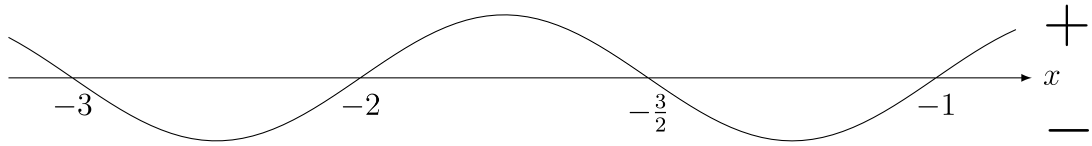
$$
\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} > \frac{3}{x+3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+3} > 0 \quad \Leftrightarrow
$$

$$
\frac{(x+2)(x+3) + 2(x+1)(x+3) - 3(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 0 \quad \Leftrightarrow
$$

$$
\frac{(x^2+5x+6) + 2(x^2+4x+3) - 3(x^2+3x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 0 \quad \Leftrightarrow
$$

$$
\frac{4x+6}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x+3}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 0.
$$

Uttrycket i vänsterledet kommer att byta tecken i punkterna $x = -3$, $x = -2$, $x = -3/2$, samt $x = -1$. Eftersom vänsterledet är positivt $(= 1/2)$ för $x = 0$ kan vi nu utan alltför stor möda rita upp följande förenklade teckentabell:



(OBS! Teckentabellen gör *inte* anspråk på att visa hur *grafen* ser ut!)

Svar: Olikheten gäller om $x < -3$ eller $-2 < x < -3/2$ eller $-1 < x$.

5. Vi börjar med att hitta brytpunkterna, $x = -2$ och $x = \frac{5}{2}$, för absolutbeloppen. Vi får tre olika fall att betrakta.

Om $x < -2$: Här får vi

$$-(2x-5)-(x+2)=8 \quad \Leftrightarrow \quad -3x+3=8 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\frac{5}{3},$$

men detta är en *falsk rot*, eftersom den inte uppfyller $x < -2$.

Om $-2 \leq x < \frac{5}{2}$: Här får vi

$$-(2x-5)+x+2=8 \quad \Leftrightarrow \quad -x+7=8 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1,$$

som fungerar, eftersom den uppfyller $-2 \leq x < \frac{5}{2}$.

Om $\frac{5}{2} \leq x$: Här får vi

$$2x-5+x+2=8 \quad \Leftrightarrow \quad 3x-3=8 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{11}{3},$$

som fungerar, eftersom den uppfyller $\frac{5}{2} \leq x$.

Svar: Enda lösningarna till ekvationen är $x = -1$ och $x = \frac{11}{3}$.

6. (a) Skriver vi om kägelsnittet till standardformen

$$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=-1$$

ser vi att det är fråga om en *hyperbel*.

Svar: Ekvationen beskriver en *hyperbel*.

(b) Asymptoterna hittar vi genom att byta ut högerledet mot en nolla, och faktorisera med hjälp av konjugatregeln:

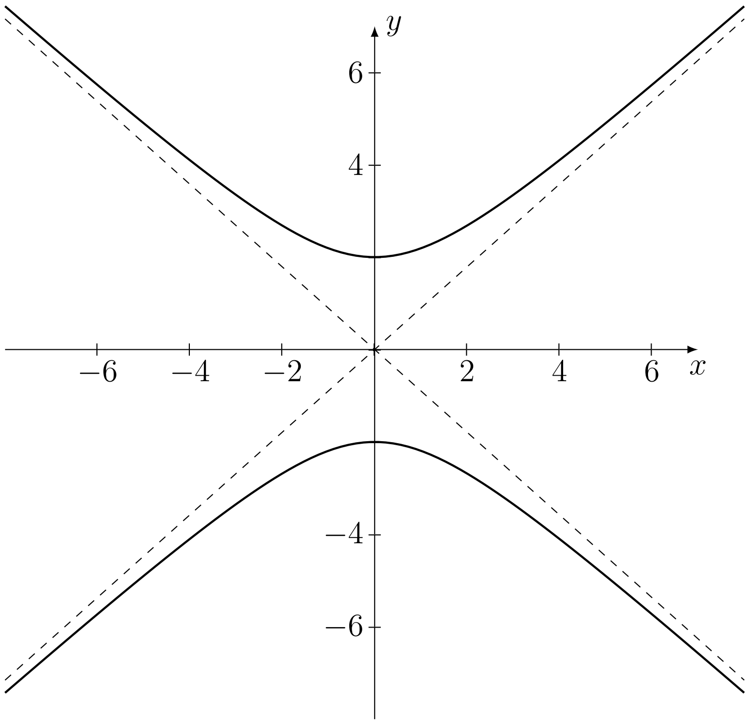
$$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{x}{\sqrt{5}}-\frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{y}{2}\right)=0.$$

Enligt nollfaktorlagen måste minst en av parenteserna vara noll, dvs

$$y=\frac{2x}{\sqrt{5}} \quad \text{eller} \quad y=-\frac{2x}{\sqrt{5}}.$$

Svar: Asymptotlinjerna är $y = \frac{2x}{\sqrt{5}}$ och $y = -\frac{2x}{\sqrt{5}}$.

(c) Vi börjar med att bestämma var kägelsnittet skär koordinataxlarna genom att se om det finns lösningar då $x = 0$ respektive då $y = 0$. Vi ser att kägelsnittet skär y-axeln då $y = \pm 2$. Genom att ta hjälp av asymptotlinjerna får vi skissen



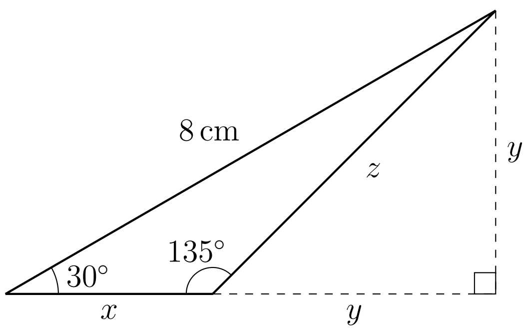
(d) Den del av kägelsnittet som ligger i övre halvplanet (dvs där $y > 0$) kan beskrivas med ett funktionsuttryck, $y = f(x)$. Bestäm ett uttryck för $f(x)$ genom att lösa ut y ur kägelsnittets ekvation. Då $y > 0$ får vi

$$5y^2 - 4x^2 = 20 \quad \Leftrightarrow \quad 5y^2 = 20 + 4x^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$y^2 = 4\left(1 + \frac{x^2}{5}\right) \quad \Leftrightarrow \quad y = 2\sqrt{1 + \frac{x^2}{5}}.$$

Detta är det sökta uttrycket för $f(x)$.

Svar: Funktionsuttrycket är $y = 2\sqrt{1 + \frac{x^2}{5}}$.

7. (a) Eftersom vinkelsumman i triangel är $180°$ blir den sista vinkeln $15°$. Det gör att biten i tipset är en likbent rätvinklig triangel, dvs dess spetsiga vinklar blir $45°$. Vi inför beteckningar enligt figuren:



Med beteckningar enligt figuren får vi nu (vi bortser helt från enheterna för att förenkla notationen — vi vet att vi mäter längder i cm och areor i cm^2)

$$\sin 30° = \frac{y}{8} \quad \Leftrightarrow \quad y = 8 \sin 30° = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

Pythagoras sats ger oss z, då

$$z^2 = y^2 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad z = y\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

(Vi får lov att använda ekvivalens eftersom vi vet att $z \geq 0$.)
Vi kan nu lösa ut x med Pythagoras sats (det går även med trigonometri):

$$(x+4)^2 + 4^2 = 8^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x+4)^2 = 48 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4\sqrt{3} - 4.$$

Triangelns omkrets blir

$$P = 8 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 4\,\text{cm} = 4 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3}\,\text{cm},$$

och arean blir

$$A = \frac{\text{basen} \cdot \text{höjen}}{2} = 8(\sqrt{3}-1)\,\text{cm}^2.$$

Svar: Triangelns area är $A = 8(\sqrt{3}-1)\,\text{cm}^2$, medan triangelns omkrets är $P = 4 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3}\,\text{cm}$.

(b) Vi börjar med att bestämma areaskalfaktorn,

$$\begin{aligned} S_{\text{area}} &= \frac{\text{ny area}}{\text{gammal area}} = \frac{16(\sqrt{3}+1)\,\text{cm}^2}{8(\sqrt{3}-1)\,\text{cm}^2} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}-1} = \\ &= \frac{2(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)^2}{3-1} = (\sqrt{3}+1)^2. \end{aligned}$$

Skalfaktorn för längdskalan, $S_{\text{längd}}$, hänger ihop med areaskalfaktorn enligt sambandet $S_{\text{längd}}^2 = S_{\text{area}}$. Detta ger $S_{\text{längd}} = \sqrt{3}+1$, och den nya omkretsen blir därför

$$\begin{aligned} P_{\text{ny}} &= (\sqrt{3}+1)(4 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3})\,\text{cm} = \\ &= 4\sqrt{3} + 4\sqrt{6} + 12 + 4 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3}\,\text{cm} = \\ &= 16 + 4\sqrt{2} + 8\sqrt{3} + 4\sqrt{6}\,\text{cm}. \end{aligned}$$

Svar: Den nya omkretsen blir $P_{\text{ny}} = 16 + 4\sqrt{2} + 8\sqrt{3} + 4\sqrt{6}\,\text{cm}$.

8. Se boken, bevisförslagen, eller anteckningarna från föreläsning 6.

9. Se boken, bevisförslagen, eller anteckningarna från föreläsning 21.