Mårten Wadenbäck

Grundläggande begrepp

Vi behöver ofta tala om olika samlingar av objekt, exempelvis "alla heltal" eller "alla likbenta trianglar med area 7". För detta auvänvänder vi mängdbegreppet.

En <u>mängd</u> är en väldefinierad samling <u>element</u>.

Om x är ett element i mängden A skrivs det $x \in A$, och i annat fall $x \notin A$.

Exempel: Låt A vara mängden som består av talen 1 och 2.

Vi kan ange A genom att lista dess element,

$$A = \{1, 2\}.$$

Eftersom 1 och 2 är element i A gäller $1 \in A$ och $2 \in A$, medan exempelvis $5 \notin A$ och SOLEN $\notin A$.

Anmärkning: Att samlingen element skall vara väldefinierad för att få kallas en mängd innebär att det alltid måste finnas ett entydigt svar på frågan om ett visst element ingår i mängden eller ej. Exempelvis tillåter vi inte "mängden av vissa tal".

Följande standardmängder behöver vi känna till:

$\emptyset$ = "tomma mängden" $= \{\ \}$

$\mathbb{N}$ = "de naturliga talen" $= \{0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Z}$ = "de hela talen" $= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$

$\mathbb{Q}$ = "de rationella talen" $= \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}$ och $q \neq 0\}$

$\mathbb{R}$ = "de reella talen".

Här angar vi $\mathbb{Q}$ med hjälp av att ange elementens <u>utmärkande egenskap</u>:

$$\left\{ \frac{p}{q} \ : \ p, q \in \mathbb{Z} \ \text{ och } \ q \neq 0 \right\}$$

"mängden av"

"allt som kan skrivas $\frac{p}{q}$"

"där" eller "så att"

"både p och q är heltal"

och "q inte är noll"

De reella talen $\mathbb{R}$ är svåra att precisera exakt, men (som tur är) inte lika svåra att använda. Vi kan tänka på dem som decimaltal med ändlig eller oändlig decimalutveckling, eller punkter på <u>tallinjen</u>.

Exempel: Gäller det att

a) $3 \in \mathbb{Z}$? (ja) b) $\frac{2}{7} \in \mathbb{R}$? (ja)

c) $-\frac{1}{3} \in \mathbb{N}$? (nej) d) $0 \in \emptyset$? (nej)

e) $4 \in \mathbb{Q}$? (ja) f) $\frac{1}{0} \in \mathbb{Q}$? (nej)

De rationella talen är decimaltalen som har ändlig eller periodisk decimalutveckling, de övriga kallas irrationella.

Exempel: $\frac{9135}{1000} = 9.135 \in \mathbb{Q}$.

Exempel: Om $x = 0.215151515\ldots$ blir

$$\begin{aligned} 1000x &= 215.15151515\ldots \\ 10x &= 2.15151515\ldots \\ \hline 990x &= 213 \end{aligned}$$

så $x = \frac{213}{990} = 0.2151515\ldots \in \mathbb{Q}$.

Exempel: Det finns många riktiga irrationella tal, bland annat $\pi = 3.141592\ldots$, $e = 2.718281\ldots$, och $\sqrt{2} = 1.414213\ldots$.

Anmärkning: Vissa tal har två olika decimalutvecklingar!

Exempel: Det är faktiskt sant att $0.999\ldots = 1.000\ldots$.

Utsagor (påståenden) är yttranden som i det givna sammanhanget har ett sanningsvärde (sant eller falskt).

Några exempel på utsagor är:

A: Taipaner är giftiga ormar. (sant)

B: $12 = 7 \cdot 5 + 3$. (falskt)

Några exempel som inte är utsagor är:

C: skynda dig!

D: Vem har tagit mina nycklar?

E: $12x + 8$.

Öppna utsagor (även kallade predikat) är utsagor som innehåller en eller flera ospecificerade fria variabler, och kan anta olika sanningsvärden för olika värden på variablerna.

Exempel: Låt $P: 2x+3y=13$ och $Q: 3x \in \mathbb{Z}$.

Då är P sann om $(x,y)=(2,3)$ men falsk om $(x,y)=(-1,10)$. Utsagan Q är sann om $x=\frac{7}{3}$ eller om $x=-5$, men falsk om $x=\frac{1}{2}$.

Utsagor kan användas för att bilda nya utsagor på olika sätt:

- konjunktion ("och"): $P \wedge Q$ är sann precis då både P och Q är sanna.
- disjunktion ("eller"): $P \vee Q$ är sann precis då minst en av P och Q är sanna.
- negation ("icke"): $\neg P$ är sann precis då P är falsk.

Detta kan åskådliggöras i en <u>sanningstabell</u>:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg P$
F	F	F	F	S
F	S	F	S	S
S	F	F	S	F
S	S	S	S	F

Om Q är sann så fort P är sann gäller <u>implikationen</u> $P \Rightarrow Q$, och vi säger att Q är en logisk konsekvens av P.

En viktig regel inom logiken är att implikationen $P \Rightarrow Q$ gäller precis då den <u>kontrapositiva</u> implikationen $\neg Q \Rightarrow \neg P$ gäller.

Om både $P \Rightarrow Q$ och $Q \Rightarrow P$ så är P och Q <u>ekvivalenta</u>, vilket vi skriver $P \Leftrightarrow Q$ (P och Q är antingen båda sanna eller båda falska).

Exempel: Sätt ut alla implikationer/ekvivalenser mellan utsagorna nedan.

$$\begin{tikzcd}
x^2-4=0 \arrow[drr, Rightarrow] & & {[x=2]\vee[x>10]} \arrow[d, Rightarrow] \\
{[x^2=4]\wedge[x\geq 0]} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[urr, Rightarrow] \arrow[rr, Rightarrow] & & x>-3
\end{tikzcd}$$

Anmärkning: Implikations- och ekvivalenspilar får bara användas tillsammans med utsagor! Ett vanligt fel, som kommer att leda till dyra och onödiga poängavdrag, är att använda $\Rightarrow$ som "nästa steg" och $\Leftrightarrow$ istället för $=$.

Exempel: I vilka fall har pilarna använts rätt?

a) $x=5 \Rightarrow 2x=10$ b) $(x+1)(x-1) \Leftrightarrow x^2-1$

c) $x^2=4 \Rightarrow \pm 2$ d) $3x+6>12 \Leftrightarrow x>2$