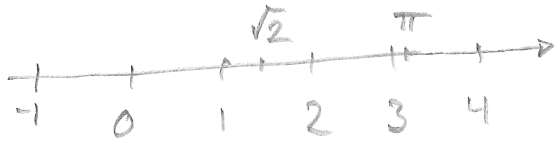
MVE425 Matematik, del A, hösten 2018, föreläsning 2.

Mårten Wadenbäck

Fortsättning om grundläggande begrepp

Med hjälp av tallinjen definierar vi följande ordningsrelationer:



(i) $a<b \Leftrightarrow$ a ligger till vänster om b

(ii) $a>b \Leftrightarrow$ a ligger till höger om b

(iii) $a\leq b \Leftrightarrow [a<b]\vee[a=b]$

(iv) $a\geq b \Leftrightarrow [a>b]\vee[a=b]$

Om $a,b\in\mathbb{R}$ så gäller precis ett av de tre fallen

(i) $a<b$ (ii) $a=b$ (iii) $a>b$.

Vi har även följande räkneregler:

1. $[a<b]\wedge[b<c] \Rightarrow a<c$
2. $a<b \Rightarrow a+c<b+c$
3. $[a<b]\wedge[c<d] \Rightarrow a+c<b+d$
4. $$a<b \Rightarrow \begin{cases} ac<bc & \text{om } c>0 \\ ac=bc=0 & \text{om } c=0 \\ ac>bc & \text{om } c<0 \end{cases}$$

Tredje fallet i regel 4 säger att "byter vi tecken så måste vi vända på olikheten".

Anmärkning: Bara för att $a<b$ och $c<d$ är det inte säkert att $a-c<b-d$ eller $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$ gäller!

Exempel: Vi använder räknereglerna för att visa att det inte finns något största tal. Detta gör vi med ett motsägelsebevis, dvs vi antar motsatsen till det som skall visas, och ser om detta leder till en motsägelse (då måste antagandet ha varit falskt).

Antag att det finns ett största tal $x \in \mathbb{R}$. Eftersom x är störst måste $1 < x$, och räknereglerna säger nu att $1 \cdot x < x \cdot x$, dvs att $x < x^2$. Detta är en motsägelse, så det kan inte finnas något största tal i $\mathbb{R}$.

Det är ofta praktiskt att ha något som fungerar som störst, men det kan alltså inte vara ett reellt tal. Vi inför ∞ som är oändligheten, som uppfyller att $x < \infty$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Varning: Många regler slutar gälla om vi har fler än en oändlighet inblandad!

På de reella talen har vi (bland annat) räkneoperationerna

<u>addition</u> $a+b$ och <u>multiplikation</u> $a \cdot b$, som uppfyller:

1. Kommutativa lagarna: $a+b=b+a$ och $a \cdot b = b \cdot a$
för alla $a,b \in \mathbb{R}$

2. Associativa lagarna: $(a+b)+c = a+(b+c)$ och
$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ för alla $a,b,c \in \mathbb{R}$

3. Distributiva lagen: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
för alla $a,b,c \in \mathbb{R}$

4. Existens av identitet:
det finns tal $0 \in \mathbb{R}$ och $1 \in \mathbb{R}$ så att
$a+0=a$ och $a \cdot 1 = a$ för alla $a \in \mathbb{R}$.

5. Existens av invers:
för alla $a \in \mathbb{R}$ finns ett $(-a) \in \mathbb{R}$ så att $a+(-a)=0$,
och om $a \neq 0$ finns ett $a^{-1} \in \mathbb{R}$ så att $a \cdot a^{-1} = 1$.

Exempel: $(3+5) \cdot 4 = 8 \cdot 4 = 32$ och
$(3+5) \cdot 4 = 4 \cdot (3+5) =$ [distributiva lagen] $=$
$= 4 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 12 + 20 = 32$

Anmärkning: Vid multiplikation skriver vi ofta ab
istället för $a \cdot b$.

Med hjälp av existensen av invers kan vi definiera <u>subtraktion</u> och <u>division</u>:

- Om $a,b \in \mathbb{R}$ låter vi $a-b = a+(-b)$.
- Om $a,b \in \mathbb{R}$ och $b \neq 0$ låter vi $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

Med subtraktion följer en del bekymmer med så kallade <u>teckenregler</u>. Bland annat gäller

$$a-(-b) = a+b, \quad \text{eftersom}$$

$$\left.\begin{array}{r} b+(-b)=0 \\ (-b)+(-(-b))=0 \end{array}\right\} \Rightarrow b = -(-b).$$

Exempel: $3-(2-4) = 3-(-2) = 3+2 = 5.$

Teckenregler vid multiplikation:

(i) $a\cdot(-b) = (-a)\cdot b = -(a\cdot b)$

(ii) $(-a)\cdot(-b) = a\cdot b$

Bevis av (i): Vi vet att $b+(-b)=0$, så alltså är $0 = a\cdot 0 = a\cdot(b+(-b)) = a\cdot b + a\cdot(-b)$, vilket ger $a\cdot(-b) = -(a\cdot b)$. Samma ide ger $(-a)\cdot b = -(a\cdot b)$.

Bevis av (ii): Eftersom $-(-(a\cdot b)) = a\cdot b$ måste

$$(-a)\cdot(-b) = -(a\cdot(-b)) = -(-(a\cdot b)) = a\cdot b.$$

Exempel: $3\cdot(2-4)=3\cdot(-2)=-(3\cdot 2)=-6.$

Teckenregler vid division:

(i) $\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$

(ii) $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$

Blandar vi de fyra räknesätten behöver vi prioriteringsregler.

Beräkningarna sker i ordningen

1. Parenteser
2. Multiplikation och division
3. Addition och subtraktion.

Anmärkning: Vid division finns osynliga parenteser kring täljaren respektive nämnaren.

Exempel: $\frac{10-12}{23-7}-(5+3)\cdot(4-6)=\frac{-2}{6-7}-8\cdot(-2)=$

$=\frac{-2}{-1}+8\cdot 2=\frac{2}{1}+16=2+16=18.$

Vi skall nu ta en snabb titt på byggstenarna som utgör en matematisk teori.

En matematisk teori byggs upp av:

- <u>definitioner</u>, som inför diverse objekt och egenskaper, exempelvis "linje" eller "delbar med 5"
- <u>axiom</u>, som är grundförutsättningar som talar om hur de definierade objekten fungerar och vilka egenskaper de har
- <u>satser</u>, som är påståenden om de definierade och egenskaperna, och som gäller under vissa angivna förutsättningar, och
- <u>bevis</u>, som är argumentationskedjor som talar om varför en given sats är sann.

På en övergripande nivå kan bevisen delas in i olika kategorier. Antag att vi vill visa en viss sats, att Q alltid gäller under förutsättning att P gäller, dvs att $P \Rightarrow Q$.

Ett <u>direkt bevis</u> är av typen $P \Rightarrow U_1 \Rightarrow U_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow Q$.

Exempel: Sats: Om $a<b$ så är $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Bevis: Enligt förutsättningen är $a<b$, så

$$a<b \Rightarrow [a+a<a+b] \wedge [a+b<b+b] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2a<a+b<2b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b.$$

Ett *indirekt bevis* är av typen $\neg Q \Rightarrow U_1 \Rightarrow U_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \neg P$

(som visar att $P \Rightarrow Q$ eftersom $\neg Q \Rightarrow \neg P$).

Exempel: Sats: Om $x^2 \neq x$ så är $x \neq 1$.

Bevis: Vi försöker göra ett indirekt bevis, dvs vi visar att $\neg[x \neq 1] \Rightarrow \neg[x^2 \neq x]$.

Vi får

$$\neg[x \neq 1] \Rightarrow x = 1 \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow \neg[x^2 \neq x].$$

Motsägelsebevis är nära besläktade med indirekta bevis, och är av typen $\neg Q \Rightarrow U_1 \Rightarrow U_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow U$ där U är falsk.