Mårten Wadenbäck

Lineära ekvationssystem

Förstagradsekvationerna utgör ett specialfall av de lineära ekvationerna. En lineär ekvation i de obekanta $x_1, x_2, \ldots, x_n$ är en ekvation som kan skrivas

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

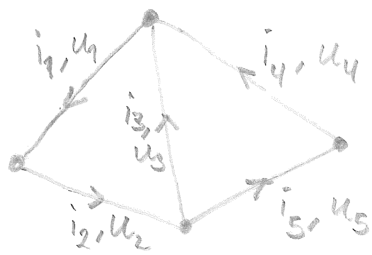
där $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ är konstanter.

Exempel: Ett viktigt begrepp inom företagsekonomi och redovisning är eget kapital. Om t är företagets tillgångar och s är företagets skulder, kan det egna kapitalet e definieras genom den lineära ekvationen

$$t - s - e = 0.$$

Många problem inom matematiken och dess tillämpningar leder till flera lineära ekvationer som samtidigt skall vara uppfyllda. En uppsättning sådana ekvationer kallas för ett lineärt ekvationssystem.

Exempel: Kirchhoffs lagar är viktiga lagar inom strömkretsläran. Kirchhoffs strömlag (KCL) säger att summan av alla strömmar i varje nod är noll.



Om de små pilarna i figuren anger referensriktning (positiv ström går i pilens riktning, negativ går i motsatt riktning) ger KCL för kretsen i figuren det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} i_1 - i_2 = 0 \\ i_2 - i_3 - i_5 = 0 \\ -i_4 + i_5 = 0 \\ -i_1 + i_3 + i_4 = 0. \end{cases}$$

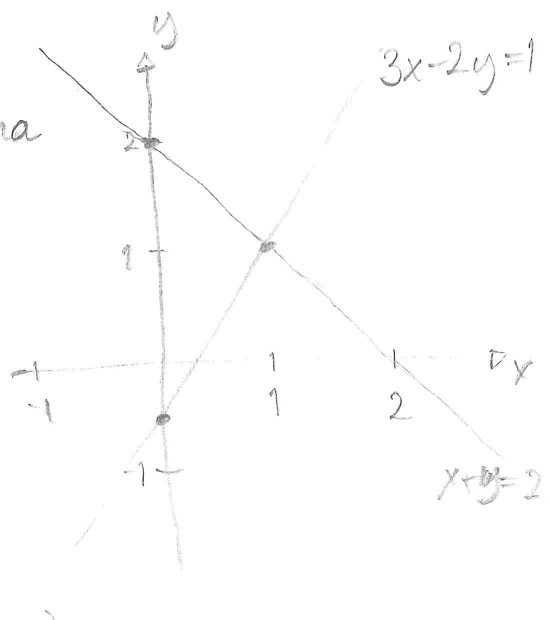
Kirchhoffs spänningslag (KVL) säger att spänningen över varje sluten slinga är noll. Använd på figuren ger KVL det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 0 \\ -u_3 + u_4 + u_5 = 0 \\ u_1 + u_2 + u_4 + u_5 = 0. \end{cases}$$

Innan vi tittar på metoder för att lösa lineära ekvationssystem försöker vi tolka geometriskt vad systemet betyder. Vi börjar med att påminna om att en ekvation av typen $ax+by=c$ (där a, b, och c är konstanter) är ekvationen för en linje.

Exempel: Rita linjerna $x+y=2$ respektive $3x-2y=1$.

Eftersom en linje bestäms entydigt av två punkter på linjen är ett sätt att hitta två punkter på respektive linje och dra linjen genom dessa. Sätter vi in $x=0$ i första linjens ekvation får vi exempelvis $y=2$, och med $x=1$ får vi $1+y=2 \Leftrightarrow y=1$. Vi kan göra motsvarande för den andra linjen.



Om de båda ekvationerna gäller samtidigt, dvs

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 3x-2y=1, \end{cases}$$

så finns det i detta fallet bara en punkt som är aktuell, $(x,y)=(1,1)$.

Av den geometriska situationen framgår att det hade kunnat finnas

- noll lösningar (om linjerna var parallella),
- en lösning (som i exemplet), eller
- oändligt många lösningar (om linjerna var samma).

Detta gäller faktiskt för alla linjära ekvationssystem, oavsett antal variabler eller ekvationer!

En metod för att lösa linjära ekvationssystem är den så kallade <u>substitutionsmetoden</u>.

Förenklat går den till så här:

Steg 1: Lös ut en variabel ur en av ekvationerna.

Steg 2: Byt ut (substituera) variabeln i alla andra ekvationer med uttrycket vi fick då vi löste ut den.

Steg 3: Upprepa Steg 1 och Steg 2 om det behövs, tills någon variabel får ett värde.

Steg 4: Sätt in värdet i uttrycket för sista variabeln, sedan näst sista, ...

Exempel: Använd substitutionsmetoden för att lösa det lineära ekvationssystemet $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x-2y=1. \end{cases}$

Steg 1: Vi kan till exempel lösa ut x ur första ekvationen. Det ger $x=2-y$.

Steg 2: Vi byter ut x i andra ekvationen mot $2-y$, och får

$$3(2-y)-2y=1 \Leftrightarrow 6-3y-2y=1 \Leftrightarrow$$
$$-5y=-5 \Leftrightarrow y=1.$$

Steg 3: Behövs ej här, y fick värdet $y=1$.

Steg 4: Vi sätter in $y=1$ i $x=2-y$ och får $x=1$.

Ekvationssystemet har lösningen $\begin{cases} x=1 \\ y=1. \end{cases}$

En annan metod för att lösa lineära ekvationssystem är eliminationsmetoden. I denna elimineras variablerna successivt ur ekvationer tills systemet är på trappstegsform (se figur), vilket (ofta) ger sista variabeln ett värde, sedan fungerar det likadant som substitution.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ \qquad 2y + z = -1 \\ \qquad\quad -2z = 6 \end{cases}$$

För själva eliminationen till trappstegsform använder vi oss av att vi kan addera/subtrahera och multiplicera/dividera med lika tal i höger- och vänsterled. Typiskt multiplicerar vi bägge led i en ekvation med något tal, och adderar/subtraherar respektive led i någon annan ekvation.

Exempel: Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 2x+3y=3 \\ 3x+2y=1. \end{cases}$

För att få trappstegsformen vill vi eliminera x ur andra ekvationen.

Vi kan göra så här:

$$\begin{cases} 2x+3y=3 \\ 3x+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\cdot 2x+3\cdot 3y=3\cdot 3 \\ 2\cdot 3x+2\cdot 2y=2\cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+9y=9 \\ 6x+4y=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 6x+9y = 9 \\ 6x+4y-(6x+9y)=2-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+9y=9 \\ -5y=-7. \end{cases}$$

Nu ger sista ekvationen $y=\frac{-7}{-5}=\frac{7}{5}$, och vi återsubstituerar i första ekvationen:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+9y=9 \\ -5y=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+9\cdot\frac{7}{5}=9 \\ y=\frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x=-\frac{18}{5} \\ y=\frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=-\frac{3}{5} \\ y=\frac{7}{5}. \end{cases}$$ Detta är alltså systemets lösning.

Vi kan förstås även lösa större system med fler variabler och med fler ekvationer.

Exempel: Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x+y-z=2 \\ x-y+2z=1 \\ x+3y-4z=3. \end{cases}$

Eliminationsmetoden ger

$$\begin{cases} x+y-z=2 & \boxed{-1} \\ x-y+2z=1 \\ x+3y-4z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=2 \\ -2y+3z=-1 & \boxed{1} \\ 2y-3z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=2 \\ -2y+3z=-1 \\ 0=0. \end{cases}$$

Systemet är nu på trappstegsform, men vi har inte fått ett värde på någon variabel så att vi kan börja återsubstituera för att lösa ut de andra. Tredje ekvationen ställer inga krav, och andra ekvationen har oändligt många lösningar. Det vanliga sättet att gå vidare här är att sätta antingen y eller z till en parameter, flytta över den till högerledet, och sedan lösa som om den vore känd.

Sätter vi exempelvis $z=t$ får vi

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ -2y+3z=-1 \\ 0=0 \end{cases} \overset{z=t}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+y=2-t \\ -2y=-1-3t \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2-t \\ y=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}t & \boxed{-1} \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}t \\ y=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}t \\ z=t. \end{cases}$$

Olika värden på parametern t ger olika lösningar till ekvationssystemet, exempelvis ger $t=1$ lösningen $(x,y,z)=(-1,2,1)$ medan $t=-3$ ger $(x,y,z)=(9,-4,-3)$.

Anmärkning: Det finns alltid många sätt att skriva parameterlösningar. Hade vi satt $y=t$ istället hade vi fått

$$\begin{cases} x = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}t \\ y = t \\ z = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}t \end{cases}$$

som ser helt annorlunda ut, men som ger exakt samma lösningar.