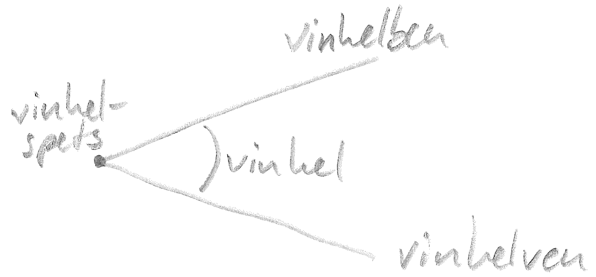
Mårten Wadenbäck

Plan geometri

Plan geometri utgör ett av matematikens äldsta områden och har studerats i tusentals år. Geometriska problem dyker upp i diverse tillämpningar, exempelvis arkitektur, tillverkning, logistik, ... Euklides (ca 300 före Kristus) systematiserade geometrin i sitt kända verk Elementa.

Om vi drar två raka strålar ut åt olika håll från samma punkt uppstår en vinkel:

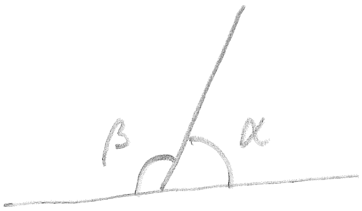


Anmärkning: Det uppstår faktiskt två vinklar, en "utanför" också!

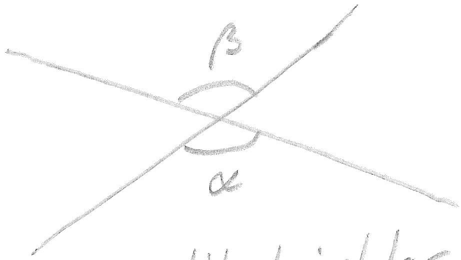
Vinklars storlek mäts i hur stor del av ett helt varv som det ena vinkelbenet måste vridas för att träffa det andra. Ett helt varv motsvarar 360° (grader).

Anmärkning: Inom matematiken och många tillämpningar används *radianer* istället för grader, och ett varv är då 2π (radianer).

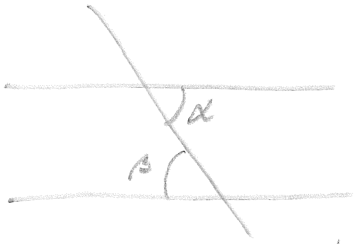
Vissa vinklar som befinner sig i särskilda konfigurationer i förhållande till varandra har egna namn:



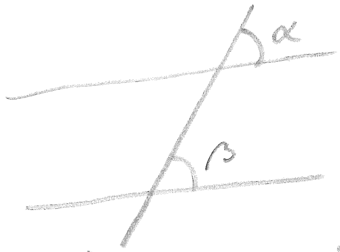
sidovinklar



vertikalvinklar



alternatvinklar



likbelägna vinklar

Sats: Om α och β är sidovinklar är $\alpha+\beta=180°$.

Sats (vertikalvinkelsatsen): Om α och β är vertikalvinklar så är $\alpha=\beta$.

Bevis: Inför en sidovinkel γ till α. Denna blir även sidovinkel till β, så $\begin{cases} \alpha+\gamma=180° \\ \beta+\gamma=180° \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta$.

En vinkel α kallas *spetsig* om $\alpha<90°$, *rät* om $\alpha=90°$, och *trubbig* om $\alpha>90°$.

Sats (Alternatvinkelsatsen): Om α och β är alternatvinklar så är $\alpha=\beta$.

Sats (Likbelägna vinkelsatsen): Om α och β är likbelägna vinklar så är $\alpha=\beta$.

Bevis: Inför en vertikalvinkel γ till α. Då är $\alpha=\gamma$, och eftersom γ och β är alternatvinklar är även $\beta=\gamma$. Detta ger $\alpha=\beta$.

Definition: En <u>triangel</u> består av tre punkter som inte ligger på en linje, tillsammans med de sträckor som förbinder punkterna. Punkterna kallas för triangelns <u>hörn</u> och sträckorna dess <u>sidor</u>.

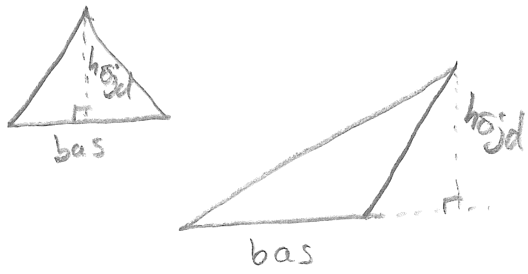
Inuti en triangel finns tre vinklar, en vid varje hörn.

En triangel kallas

- <u>spetsvinklig</u> om alla dess vinklar är mindre än $90°$,
- <u>rätvinklig</u> om en vinkel är $90°$,
- <u>trubbvinklig</u> om en vinkel är större än $90°$.

En sida kan väljas som <u>bas</u> i triangeln.

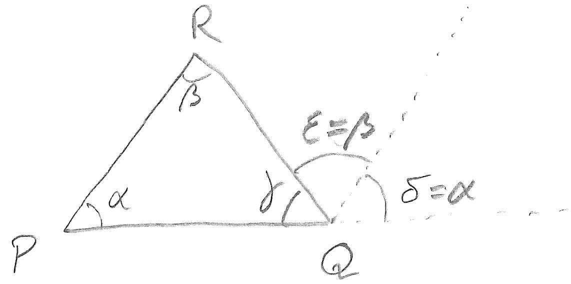
En sträcka som dras från motstående hörnet och som träffar basen under rät vinkel kallas en <u>höjd</u> i triangeln.



Anmärkning: Ibland ligger höjden utanför triangeln!

Sats: Vinkelsumman i en triangel är 180°.

Bevis: Förläng sidan mellan P och Q och drag en linje genom Q som är parallell med sidan mellan P och R. Då bildas en vinkel δ som är likbelägen med α (och alltså $\delta=\alpha$) och en vinkel ε som är alternatvinkel till β (så alltså är $\varepsilon=\beta$). De tre vinklarna vid Q utgör tillsammans 180°, och vi har alltså $\alpha+\beta+\gamma=180°$.



En triangel kallas:

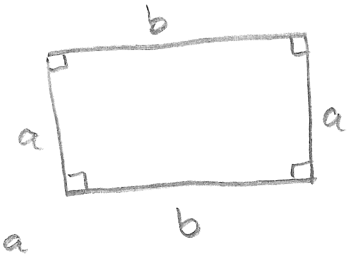
- <u>likbent</u>, om två sidor är lika långa,
- <u>liksidig</u>, om alla sidor är lika långa.

Det går att bevisa att två vinklar i en likbent triangel måste vara lika, och att tre vinklar i en liksidig triangel måste vara lika.

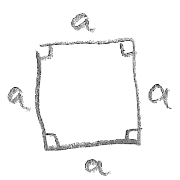
Fyrhörningar är geometriska objekt som består av fyra hörn och fyra sträckor som förbinder hörnen (varje hörn är förbundet med två andra).

Vi har bland annat följande typer av fyrhörningar:

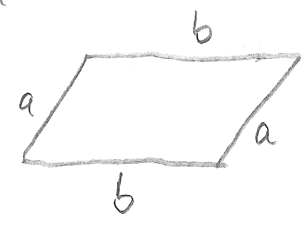
- <u>rektanglar</u>, där alla vinklar vid hörnen är räta,



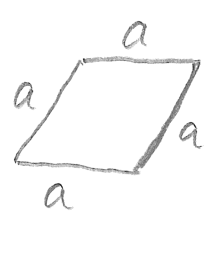
- <u>kvadrater</u>, som är rektanglar där alla sidor är lika,



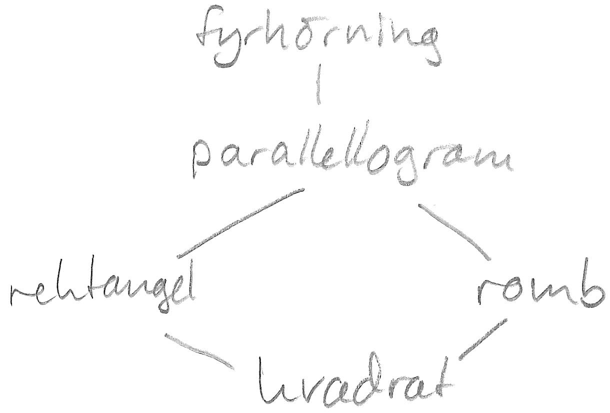
- <u>parallellogram</u>, där motstående sidor är parallella,



- <u>romber</u>, som är parallellogram där sidorna är lika.



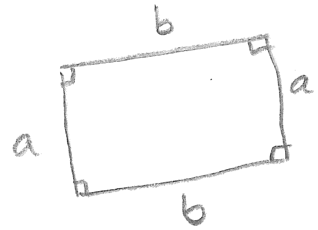
Vi kan göra ett släktträd för dessa fyrhörningar.



Både rektanglar och romber är speciella typer av parallellogram, och kvadraten är dels en speciell rektangel och dels en speciell romb.

<u>Omkretsen</u> till en geometrisk figur definierar vi som summan av sträckorna som förbinder hörnen.

Exempel: Omkretsen till en rektangel blir $2a+2b$.



<u>Arean</u> av en geometrisk figur är ett mått på ytan.

Vi utgår från att vi beräknar arean av en rektangel som area = basen × höjden.

Observera att alla parallellogram kan stuvas om till rektanglar, och vi ser att även här blir arean basen × höjden.