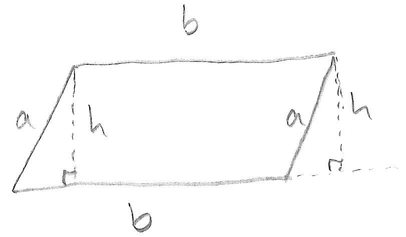
MVE425 Matematik, del A, hösten 2018, föreläsning 6

Mårten Wadenbäck

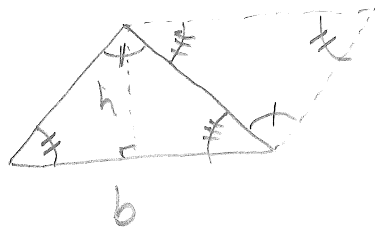
Fortsättning plan geometri

Förra föreläsningen såg vi att arean av ett parallellogram ges av $A = b \cdot h$. Detta använder vi för att visa följande.



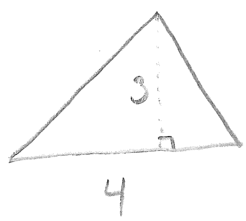
Sats: Arean av en triangel med bas b och höjd h är $A = \frac{a \cdot b}{2}$.

Bevis: Genom att dra de streckade linjerna i figuren och identifiera alternatvinklar ser vi att vi har ett parallellogram vars area $a \cdot b$ är dubbla arean av triangelns, alltså blir $A = \frac{ab}{2}$ för triangeln.

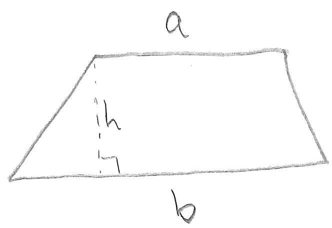


Exempel: Arean av triangeln i figuren blir

$$A = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6.$$



En <u>parallelltrapets</u> är en fyrhörning i vilken två motstående sidor är parallella.



Sats: Arean av parallelltrapetsen i figuren är $A = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

Bevis: Dela in parallelltrapetsen i två trianglar genom att dra en linje mellan två motstående hörn. Detta ger upphov till två trianglar med höjden h och baser a respektive b, och arean blir därmed

$$A = \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{ah+bh}{2} = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Exempel: Bestäm längden av den ena parallella sidan i en parallelltrapets med area $A=24$ om den andra parallella sidan har längden 6 och höjdens längd också är 6.

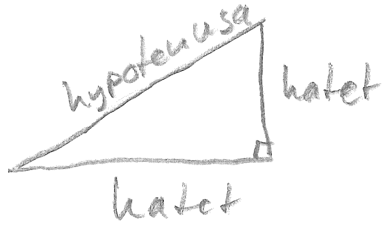
Vi låter $h=6$, $b=6$, och $A=24$. Insatt i areaformeln får vi

$$A = \frac{a+b}{2} \cdot h \Leftrightarrow 24 = \frac{a+6}{2} \cdot 6 \Leftrightarrow 24 = (a+6) \cdot 3 \Leftrightarrow$$

$$24 = 3a + 18 \Leftrightarrow 6 = 3a \Leftrightarrow a = 2.$$

Sista sidans längd är alltså $a=2$.

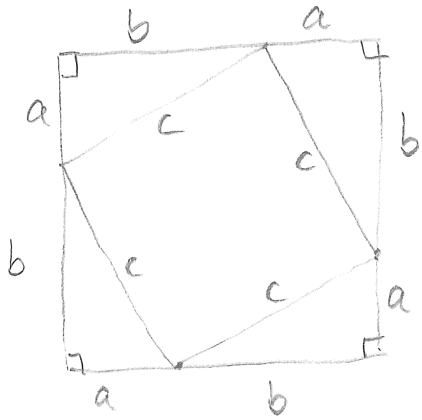
I en rätvinklig triangel kallas den räta vinkelns vinkelben för <u>kateter</u> och den sista (längsta) sidan kallas <u>hypotenusan</u>.



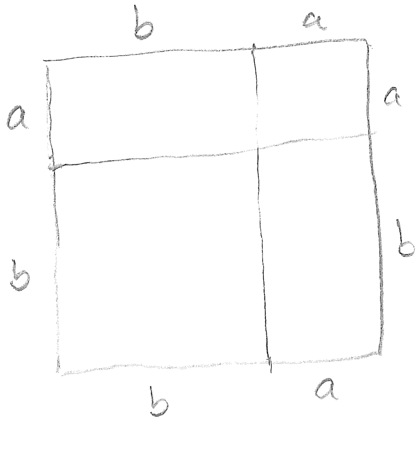
För rätvinkliga trianglar gäller

Sats (Pythagoras sats): Om a och b är kateter i en rätvinklig triangel med hypotenusa c så är

$$a^2+b^2=c^2.$$



Bevis: Dela upp en kvadrat med sidan $a+b$ på två olika sätt enligt figurerna till höger. Arean i den första ges av $A=4\cdot\frac{ab}{2}+c^2=2ab+c^2$,



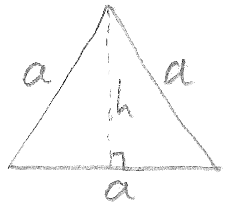
i den andra blir arean $A=ab+a^2+b^2+ab=a^2+2ab+b^2$.

Eftersom areorna är lika är

$$a^2+\cancel{2ab}+b^2=\cancel{2ab}+c^2 \Leftrightarrow$$

$$a^2+b^2=c^2.$$

Exempel: Bestäm höjden i en liksidig triangel med sidan a.

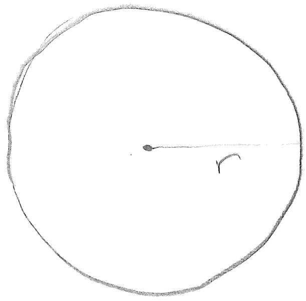


Vi delar triangeln längs höjden, vilket ger två rätvinkliga trianglar med bas $\frac{a}{2}$ och den okända höjden h. Enligt Pythagoras sats måste $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} + h^2 = a^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4}$.

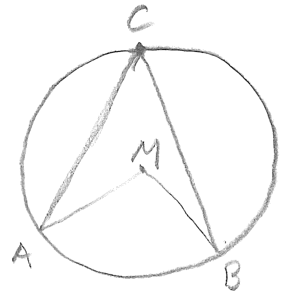
Eftersom $h \geq 0$ blir $h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Definition: En *cirkel* består av alla punkter som ligger på ett givet avstånd r (*radien*) från en fix medelpunkt (*medelpunkten*).

En sträcka mellan två punkter på cirkeln kallas för en *korda*, och en korda som går genom medelpunkten kallas *diameter*.

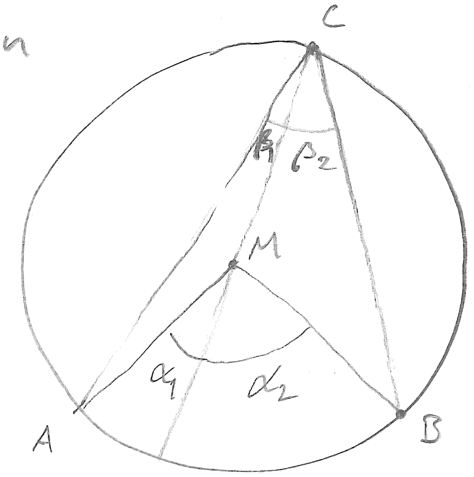


För en båge mellan två punkter, A och B, på cirkeln kallas vinkeln AMB *medelpunktsvinkeln* till bågen. Om C är en punkt på cirkeln som inte ligger på bågen kallas vinkeln ACB *randvinkel* till bågen.



Sats (Randvinkelsatsen): För en cirkelbåge gäller att dess medelpunktsvinkel är dubbelt så stor som varje randvinkel till bågen.

Bevis: Låt α vara medelpunktsvinkeln och låt β vara randvinkeln, och drag diametern genom randvinkelns spets.



Diametern delar då vinklarna i två delar, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ och $\beta = \beta_1 + \beta_2$.

Vi tittar nu närmare på den vänstra triangeln AMC. Denna är likbent (två sidor är lika med radien) och det följer att vinkeln vid A är β_1, och därför är vinkeln vid M $180° - 2\beta_1$. Eftersom α_1 är en sidovinkel till denna så måste $\alpha_1 + (180° - 2\beta_1) = 180° \Leftrightarrow$

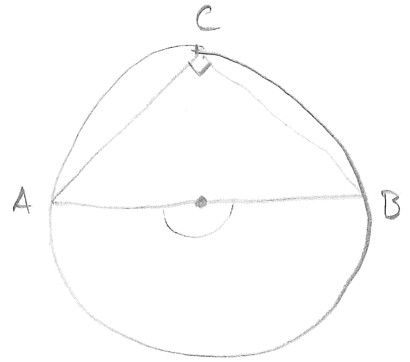
$\alpha_1 - 2\beta_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = 2\beta_1$.

Samma resonemang för den högra triangeln ger $\alpha_2 = 2\beta_2$.

Detta leder till $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta_1 + 2\beta_2 = 2(\beta_1 + \beta_2) = 2\beta$,

så vi har visat att $\alpha = 2\beta$.

Följdsats: Om A och B är skärningspunkter på cirkeln och en diameter, så är randvinkeln till bågen mellan A och B alltid 90°.



För alla cirklar gäller att förhållandet mellan dess omkrets och dess diameter är samma!

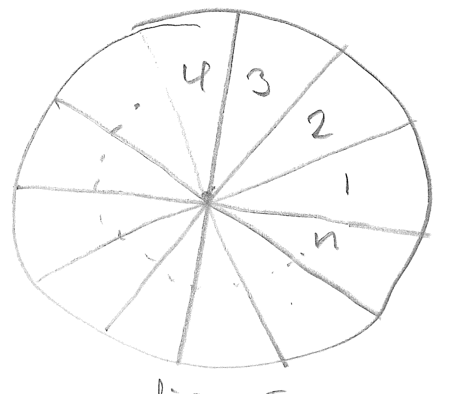
Denna konstanten kallas π, och definieras

$$\pi = \frac{\text{Omkrets}}{\text{diameter}}. \quad (\approx 3.1415\ldots)$$

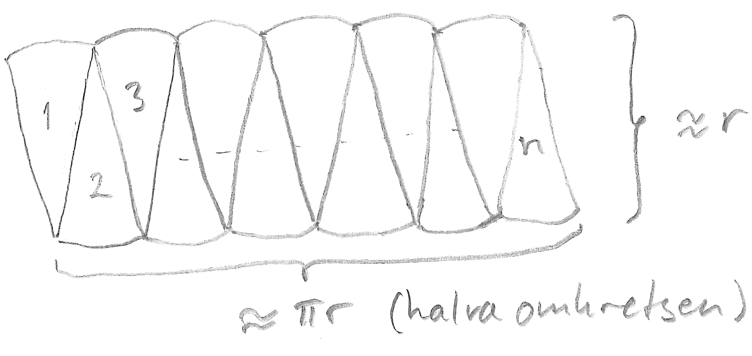
Omkretsen till en cirkel med radie r blir $2\pi r$, eftersom diametern är $2r$.

Arean för en cirkelskiva med radie r blir $A = r^2\pi$.

Detta kan vi inte bevisa ännu, men figuren nedan kan ge en uppfattning om varför det är rimligt:

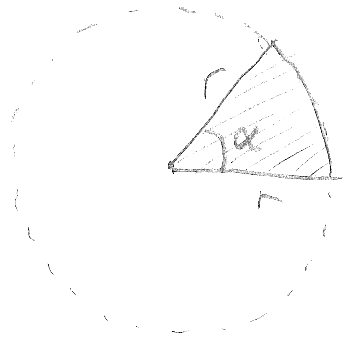


radie r



nästan parallellogram...

En cirkelsektor är en tårtbit-liknande del av en cirkel, där två av dess sidor är radier och den tredje är en cirkelbåge.



Medelpunktsvinkeln avgör hur stor del av hela cirkeln som cirkelsektorn utgör, och dess area blir

$$A = \frac{\alpha}{360}\cdot r^2\pi.$$

Dess omkrets blir $\frac{\alpha}{360}\cdot 2\pi r + 2r.$