Mårten Wadenbäck

Likformighet, skala, och inledande trigonometri

Om vi förstorar eller förminskar ett objekt på ett sätt som "bevarar formen" gör vi en likformig avbildning:

(i) motsvarande vinklar i bild och föremål är lika, och

(ii) alla längder behåller sina inbördes förhållanden.

Med (längd)skalan S för en likformig avbildning menas $S = \frac{B}{F}$, där B är ett avstånd i bilden och F är motsvarande avstånd i det ursprungliga objektet.

Anmärkning: Det gäller alltid att $S>0$. Om $S>1$ är det fråga om en förstoring, och om $S<1$ är det fråga om en förminskning.

Anmärkning: Skalor anges ofta som ett förhållande snarare än ett uträknat tal. På kartor betyder skalan $1:x$ att den verkliga sträckan är x gånger så lång som på kartan.

Exempel: En vanlig skala för modelljärnvägar är 1:87. En modell av en bro som är $26.5\text{ cm} = 0.265\text{ m}$ är i verkligheten $87 \cdot 0.265\text{ m} \approx 23\text{ m}$ lång.

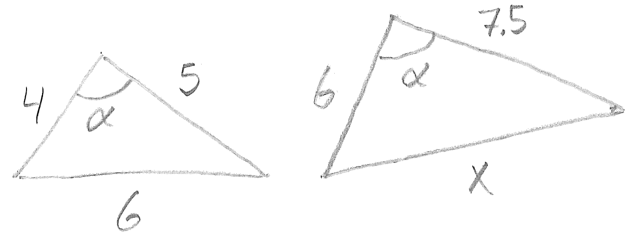
Två trianglar är automatiskt likformiga om

(i) två par motsvarande vinklar är lika,

(ii) förhållandet mellan två sidor är samma och den mellanliggande vinkeln är lika, eller

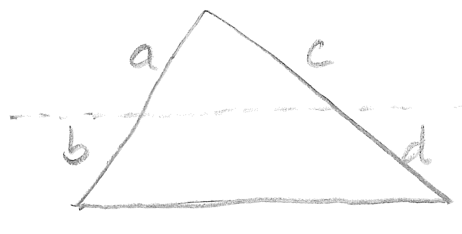
(iii) Förhållandet mellan varje par av motsvarande sidor är samma.

Exempel: Bestäm sidan x.



Eftersom $\frac{6}{4}=1.5$ och $\frac{7.5}{5}=1.5$, och α är mellanliggande vinkel i båda fallen, så är trianglarna likformiga. Alltså måste även $\frac{x}{6}=1.5$, vilket ger $x=1.5\cdot 6=9$.

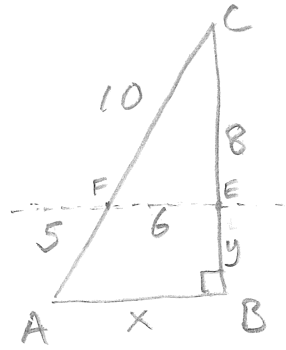
Sats (Transversalsatsen): Parallell-transversalen (som är parallell med triangelns bas) delar sidorna så att $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.



Bevis: Stora triangeln är likformig med den lilla topptriangeln, så alltså måste $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c} \Leftrightarrow 1+\frac{b}{a}=1+\frac{d}{c} \Leftrightarrow$

$\frac{b}{a}=\frac{d}{c} \Leftrightarrow bc=ad \Leftrightarrow \frac{c}{d}=\frac{a}{b}$.

Exempel: Bestäm arean av triangeln ABC. Enligt transversalsatsen är $\frac{10}{5} = \frac{8}{y} \Leftrightarrow 2 = \frac{8}{y} \Leftrightarrow y = \frac{8}{2} = 4.$



Triangeln ABC är likformig med triangeln FEC, så $\frac{x}{6} = \frac{10+5}{10} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9.$

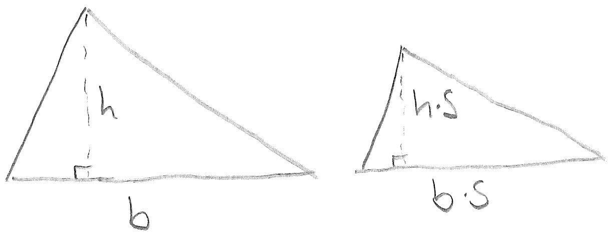
Arean av triangeln ABC fås nu som $\frac{\text{basen} \times \text{höjden}}{2}$:

$$A = \frac{x(8+y)}{2} = \frac{9 \cdot (8+4)}{2} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 9 \cdot 6 = 54.$$

Anmärkning: Längdskalan vid förstoringen från FEC till ABC är $S = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1.5$. Arean av FEC är $\frac{6 \cdot 8}{2} = 24$, och eftersom $1.5 \cdot 24 = 36 \neq 54$ ser vi att arean inte ändras med samma skalfaktor!

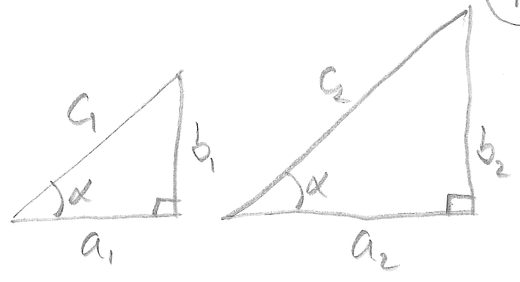
Sats: Vid likformig avbildning med längdskala S ändras areors storlek med faktorn (areaskalan) S^2.

Bevis (för trianglar): Vid likformig avbildning med längdskala S skalas alla längder om med faktorn S. Förhållandet mellan de två trianglarnas areor blir då



$$\frac{A_{\text{skalad}}}{A_{\text{original}}} = \frac{\frac{bS \cdot hS}{2}}{\frac{b \cdot h}{2}} = \frac{b \cdot S \cdot h \cdot S}{2} \cdot \frac{2}{b \cdot h} = S \cdot S = S^2.$$

Betrakta två likformiga rätvinkliga trianglar. Här gäller bland annat att $\frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} \Leftrightarrow \frac{b_2}{c_2} = \frac{b_1}{c_1}$, så



förhållandet mellan den mot α stående kateten och hypotenusan är lika i trianglarna, och beror bara på α.

På samma sätt är flera andra förhållanden mellan sidorna enbart beroende av α. Vi definierar därför

$$\sin\alpha = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusan}}, \qquad \cos\alpha = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusan}},$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}}, \qquad \cot\alpha = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{motstående katet}}.$$

Om vi betraktar komplementvinkeln till α, dvs $90°-\alpha$, ser vi att $\cos\alpha = \sin(90°-\alpha)$ och $\cot\alpha = \tan(90°-\alpha)$.

Vi har även följande samband:

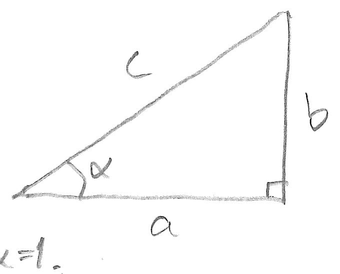
(i) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

(ii) $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

(iii) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ ("trigonometriska ettan")

Bevis: (i) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a} = \frac{b}{a} = \tan\alpha$

(ii) $\frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{1}{1}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \cot\alpha$



(iii) Pythagoras sats ger $a^2+b^2=c^2 \Leftrightarrow$

$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{c}\cdot\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\cdot\frac{b}{c} = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$

Exempel: Om $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ för $0° < \alpha < 90°$, bestäm $\tan\alpha$.

För $\tan\alpha$ behöver vi både $\sin\alpha$ och $\cos\alpha$, så vi börjar med att bestämma $\sin\alpha$ via trigonometriska ettan:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \sin^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{13}\cdot\frac{5}{13} + \sin^2\alpha = 1 \Leftrightarrow$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{25}{13\cdot 13} = \frac{13\cdot 13}{13\cdot 13} - \frac{25}{13\cdot 13} = \frac{169-25}{13\cdot 13} = \frac{144}{13\cdot 13}.$$

Eftersom $\sin\alpha > 0$ måste $\sin\alpha = \sqrt{\frac{144}{13\cdot 13}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{13\cdot 13}} = \frac{12}{13}$.

Nu kan vi beräkna $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{13}\cdot\frac{13}{5} = \frac{12}{5} = 2.4.$

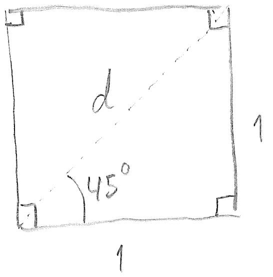
För de flesta vinklar kan vi inte få fram exakta värden på de trigonometriska funktionerna, utan måste nöja oss med ett närmevärde med några decimaler.

Vissa vinklar låter oss dock beräkna värdena exakt:

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	odefinierad

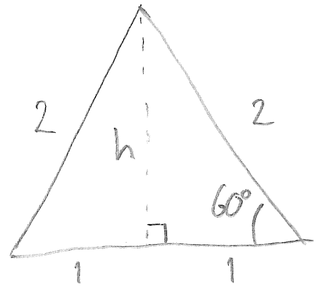
(För $\alpha = 0°$ och $\alpha = 90°$ blir det ingen rätvinklig triangel, eftersom någon vinkel då skulle bli noll.)

Värdena för 30°, 45°, och 60° kan vi härleda ur en kvadrat respektive en liksidig triangel:



Pythagoras sats ger

$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Leftrightarrow d = \sqrt{2}$



Pythagoras sats ger

$1^2 + h^2 = 2^2 \Leftrightarrow h^2 = 3 \Leftrightarrow h = \sqrt{3}.$