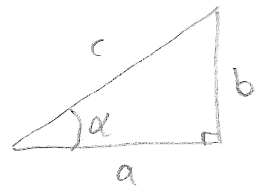
MVE425 Matematik, del A, hösten 2018, föreläsning 8

Mårten Wadenbäck

Fortsättning av trigonometrin, inledande potenser

Om vi vet en sidlängd och en vinkel (utöver den räta) i en rätvinklig triangel kan vi med hjälp av trigonometri solvera triangeln, dvs bestämma alla vinklar och sidlängder.



Ur definitionen av de trigonometriska funktionerna får vi nämligen för triangeln ovan att

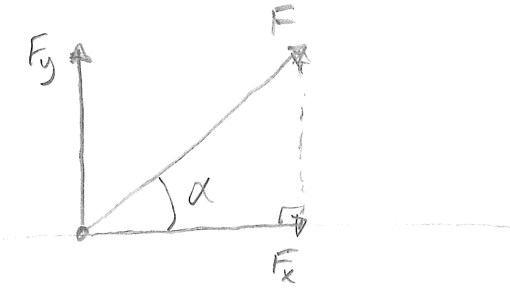
$$\sin\alpha = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b = c\cdot\sin\alpha \Leftrightarrow c = \frac{b}{\sin\alpha}$$

respektive

$$\cos\alpha = \frac{a}{c} \Leftrightarrow a = c\cdot\cos\alpha \Leftrightarrow c = \frac{a}{\cos\alpha}.$$

Detta kan bland annat användas för att komposantuppdela krafter och vektorer.

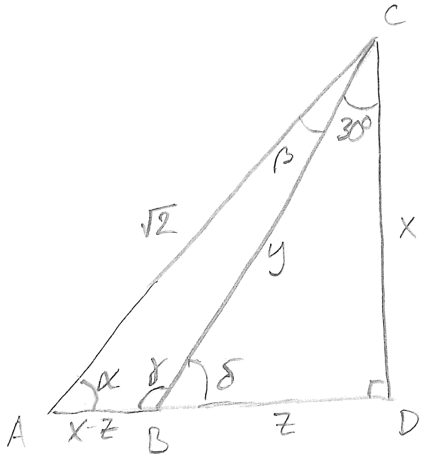
Exempel: En kraft F som verkar på en angreppspunkt i en riktning som bildar en vinkel α mot horisontalplanet kan delas upp i en vertikal komposant F_y med längden $F\sin\alpha$ och en horisontell komposant F_x med längden $F\cos\alpha$.



De trigonometriska funktionerna har även inverser ("baklänges-funktioner") om $0° < \alpha < 90°$. Dessa kallas arcusfunktioner, och uppfyller

$$\sin\alpha = x \iff \alpha = \arcsin x,$$
$$\cos\alpha = x \iff \alpha = \arccos x,$$
$$\tan\alpha = x \iff \alpha = \arctan x, \quad \text{och}$$
$$\cot\alpha = x \iff \alpha = \operatorname{arccot} x.$$

Exempel: Eftersom $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ så är $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = 30°$.



Exempel: Solvera triangeln ABC i figuren, där ADC är en likbent triangel.

Vi börjar med vinklarna.

Eftersom ADC är likbent blir vinkeln vid A och vinkeln vid C lika stora, och eftersom vinkelsumman i ADC måste vara $180°$ blir $2\alpha + 90° = 180° \iff 2\alpha = 90° \iff \alpha = 45°$.

Eftersom $\beta + 30° = \alpha = 45°$ får vi $\beta = 15°$, och ur $\alpha+\beta+\gamma = 180°$ får vi $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 45° - 15° = 120°$. Sidovinkeln δ till vinkeln γ blir då $\delta = 60°$.

Sidlängderna är knepigare. Vi börjar med att bestämma x ur ADC med hjälp av Pythagoras sats:

$$x^2+x^2=(\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 2x^2=2 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1.$$

När vi nu känner x kan vi använda trigonometri för att bestämma y och z. Vi får

$$\cos 30^\circ = \frac{x}{y} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y\sqrt{3} = 2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

och

$$\sin 30^\circ = \frac{z}{y} \Leftrightarrow z = y \sin 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

I triangeln ABC har vi alltså $\alpha=45^\circ$, $\beta=15^\circ$, $\gamma=120^\circ$, sträckan $AB = 1-\frac{1}{\sqrt{3}}$, sträckan $BC = \frac{2}{\sqrt{3}}$, och sträckan $AC=\sqrt{2}$.

Potenser

På samma sätt som upprepad addition kan skrivas som en multiplikation, $\underbrace{a+a+\dots+a}_{n \text{ st}} = n \cdot a$, har vi ett kompakt skrivsätt för upprepad multiplikation: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ st}}$.

Uttryck av typen a^n kallas <u>potenser</u>, där a kallas <u>bas</u> och n kallas <u>exponent</u>. Ur definitionen får vi potenslagarna

(i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

(ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

för positiva heltal m och n.

Bevis: (i) $a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m \text{ st}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ st}} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m+n \text{ st}} = a^{m+n}$

(ii) $(a^m)^n = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m} \cdots \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m}}_{n \text{ st}} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{mn \text{ st}} = a^{mn}$

(iii) $(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab)\cdots(ab)}_{n \text{ st}} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ st}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n \text{ st}} = a^n \cdot b^n.$

Vi skall nu definiera potenser med ett godtyckligt heltal som exponent. Vi börjar med att betrakta exponenten $n=0$.

För att potenslag (i) skall gälla måste

$$a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m \Leftrightarrow a^0 = \frac{a^m}{a^m} = 1,$$

förutsatt att $a^m \neq 0$, dvs $a \neq 0$. Använder vi detta tillsammans med potenslag (i) får vi

$$1 = a^0 = a^{n-n} = a^{n+(-n)} = a^n \cdot a^{-n} \Leftrightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Exempel: Potenslagarna ger $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{1}{(-5)(-5)(-5)} = \frac{1}{-125} = -\frac{1}{125}.$

Vi kan nu visa ytterligare potenslagar:

(iv) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(v) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$

Bevis: (iv) $\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$

(v) $a^n = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n b^n \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$

Exempel: Förenkla uttrycket $\frac{(6a^2b^3)^5}{(3a^4b)^2}$.

Vi får

$$\frac{(6a^2b^3)^5}{(3a^4b)^2} \underset{(iii)}{=} \frac{(6a^2)^5(b^3)^5}{(3a^4)^2b^2} \underset{(iii)}{=} \frac{6^5(a^2)^5(b^3)^5}{3^2(a^4)^2b^2} \underset{(ii)}{=} \frac{6^5a^{10}b^{15}}{3^2a^8b^2} =$$

$$= \frac{6^5}{3^2}\cdot\frac{a^{10}}{a^8}\cdot\frac{b^{15}}{b^2} \underset{(iv)}{=} \frac{(2\cdot3)^5}{3^2}\cdot a^2\cdot b^{13} \underset{(iii)}{=} \frac{2^5\cdot3^5}{3^2}\cdot a^2b^{13} \underset{(iv)}{=} 2^5\cdot3^3a^2b^{13} =$$

$$= 32\cdot27a^2b^{13} = 864a^2b^{13}.$$