Mårten Wadenbäck

Kvadratkomplettering och andragradsekvationer

Kvadratkomplettering går ut på att lägga till lämplig kvantitet till ett uttryck så att det blir en jämn kvadrat. Eftersom första kvadreringsregeln säger att $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$ kan uttrycket x^2+2ax kompletteras till en jämn kvadrat genom addition av a^2, så att alla x samlas i kvadraten.

Exempel: Kvadratkomplettering i följande uttryck ger:

a) $$x^2+8x+25 = x^2+2\cdot4x+25 = \underbrace{x^2+2\cdot4x+4^2}_{(x+4)^2}-4^2+25 = (x+4)^2+9$$

b) $$12x-3x^2 = -3(-4x+x^2) = -3(x^2-2\cdot2x) = -3(\underbrace{x^2-2\cdot2x+2^2}_{(x-2)^2}-2^2) = -3((x-2)^2-4)$$

c) $$x^2+x = x^2+2\cdot\tfrac{1}{2}x = \underbrace{x^2+2\cdot\tfrac{1}{2}x+(\tfrac{1}{2})^2}_{(x+\frac{1}{2})^2}-(\tfrac{1}{2})^2 = (x+\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{4}.$$

Anmärkning: Eftersom en kvadrat alltid är ≥ 0 ger kvadratkomplettering svar på uttryckets minsta (eller största) värde. Exempelvis ger a) att $x^2+8x+25=(x+4)^2+9\geq 9$ för alla x, och det är lika med 9 precis då $(x+4)^2=0$, dvs då $x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$.

Kvadratkomplettering är användbart bland annat för att lösa andragradsekvationer. En andragradsekvation i den obekanta x är en ekvation av typen $a_2x^2+a_1x+a_0=0$, där $a_2 \neq 0$. Eftersom $a_2 \neq 0$ kan vi alltid dela med a_2, och då får vi koefficienten 1 framför x^2. Om ekvationen är på denna form, dvs $x^2+px+q=0$, sägs den vara på standardform (eller normalform).

Exempel: Lös andragradsekvationen $5x^2+10x+5=0$.

Vi skriver ekvationen på standardform och kvadratkompletterar:

$$5x^2+10x+5=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0.$$

Enda möjligheten för att detta skall gå är, enligt nollfaktorlagen, att $x+1=0$, dvs att $x=-1$.

Vi ser att $x=-1$ fungerar som lösning:

$$5(-1)^2+10(-1)+5 = 5-10+5=0.$$

Exempel: Lös ekvationen $3x^2+3x=6$.

Först skriver vi om ekvationen på standardform, och sedan kvadratkompletterar vi:

$$3x^2+3x=6 \Leftrightarrow 3x^2+3x-6=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow$$

$$x^2+2\cdot\tfrac{1}{2}x-2=0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2+2\cdot\tfrac{1}{2}x+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2}_{(x+\frac{1}{2})^2}-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4}-2=0 \Leftrightarrow \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{9}{4}=0.$$

Det allmänna tillvägagångssättet kan användas för att hitta en formel som ger ekvationens lösning(ar).

Sats (pq-formeln): Om $p^2 \geq 4q$ har ekvationen $x^2+px+q=0$ lösningarna $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$.

Bevis: Ekvationen står redan på standardform.

Kvadratkomplettering av vänsterledet ger

$$x^2+px+q = x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+q = \underbrace{x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2}_{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q =$$

$$= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q.$$

Detta ger oss alltså $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=0 \Leftrightarrow$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q \Leftrightarrow x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \Leftrightarrow$$

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Uttrycket under rottecknet är inte negativt, eftersom $p^2\geq 4q \Leftrightarrow p^2-4q\geq 0 \Leftrightarrow \frac{p^2}{4}-q\geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2-q\geq 0.$

Anmärkning: Vi fäster inte så stor vikt vid att i förväg kontrollera att $p^2\geq 4q$, eftersom det ju ändå visar sig längre fram i räkningarna.

Exempel: Hitta alla lösningar till ekvationen $x^2+6x-3=0$.

Om det finns några lösningar så ges de av pq-formeln:

$$x=-\frac{6}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2-(-3)}=-3\pm\sqrt{3^2+3}=-3\pm\sqrt{12}.$$

Eftersom uttrycket under rottecknet blev positivt fick vi lösningarna $x_1=-3-\sqrt{12}$ och $x_2=-3+\sqrt{12}$.

Kontroll:

$$(-3-\sqrt{12})^2+6(-3-\sqrt{12})-3=(-3)^2-2(-3)\sqrt{12}+(\sqrt{12})^2-18-6\sqrt{12}-3=$$

$$=9+6\sqrt{12}+12-18-6\sqrt{12}-3=0 \quad \text{(stämmer!)}$$

och

$$(-3+\sqrt{12})^2+6(-3+\sqrt{12})-3=(-3)^2+2(-3)\sqrt{12}+(\sqrt{12})^2-18+6\sqrt{12}-3=$$

$$=9-6\sqrt{12}+12-18+6\sqrt{12}-3=0 \quad \text{(stämmer!)}$$

Exempel: Hitta alla lösningar till ekvationen $x^2-4x+5=0$.

Eventuella lösningar ges av pq-formeln:

$$x=-\frac{-4}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2-5}=2\pm\sqrt{2^2-5}=2\pm\sqrt{-1}.$$

Eftersom $\sqrt{-1}$ inte är definierat finns det inga (reella) lösningar till ekvationen.

Anmärkning: Det finns <u>komplexa tal</u>, $2\pm i$, som löser ekvationen, men än så länge struntar vi i dem.

Precis som för förstagradsekvationerna finns det många ekvationer som inte är andragradsekvationer men som kan skrivas om till sådana.

Exempel: Lös ekvationen $x+3-3\sqrt{x+1}=0$.

Detta är ingen första- eller andragradsekvation, utan bara en jobbig ekvation. Det som är jobbigt är $\sqrt{x+1}$. En vanlig strategi är att göra ett <u>variabelbyte</u>, där man håller det jobbiga för ett nytt namn. Om vi sätter $u=\sqrt{x+1}$ får vi $u^2=x+1 \Leftrightarrow x=u^2-1$. Den ursprungliga ekvationen blir nu $\underbrace{u^2-1}_{x}+3-3\underbrace{u}_{\sqrt{x+1}}=0$, som är en andragradsekvation, $u^2-3u+2=0$.

Dess lösningar är (om det finns några)

$$u=-\frac{-3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}.$$

Båda dessa är positiva, och är godkända av villkoret $u=\sqrt{x+1}\geq 0$ (roten ur något är alltid ≥ 0), så vi har $u_1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$ och $u_2=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2$. Dessa ger $x_1=u_1^2-1=1-1=0$ och $x_2=u_2^2-1=4-1=3$.

(Kontrollera även i ursprungsekvationen!)