Polynom

Ett uttryck av typen $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, där $n \in \mathbb{N}$, kallas för polynom. Ett polynoms grad är det största n för vilket $a_n \neq 0$, och betecknas grad P. Talen $a_0, \ldots, a_n$ kallas för polynomets koefficienter, och x kallas för dess variabel eller dess obekanta.

Anmärkning: Nollpolynomet $P(x) = 0$ har graden $-\infty$ (detta passar bra med räknereglerna), men vissa författare vägar inte detta utan säger att det saknar grad.

Exempel: Vilka av följande uttryck är polynom i x?

a) $x^2 - 3x - 6$ b) $x^2 + x^{-1}$

c) $x^{3/2} + 2$ d) 15

Mängden av alla polynom i variabeln x och med reella koefficienter betecknas $\mathbb{R}[x]$, och har många egenskaper som liknar de bekanta talmängdernas (särskilt $\mathbb{Z}$).

Addition och multiplikation av polynom lyder de behanta räknelagarna från $\mathbb{Z}$ (kommutativa lagen, associativa lagen, distributiva lagen, existens av identitet, existens av invers för addition men inte multiplikation).

Exempel: Om $p(x) = x^3 - x + 1$ och $q(x) = x - 2$ blir

$$p(x) + q(x) = x^3 - x + 1 + x - 2 = x^3 - 1,$$
$$p(x) - q(x) = x^3 - x + 1 - (x-2) = x^3 - x + 1 - x + 2 = x^3 - 2x + 3, \quad \text{och}$$
$$p(x)\,q(x) = (x^3 - x + 1)(x-2) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + x - 2 = x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x - 2.$$

Sats: För två polynom $p(x)$ och $q(x)$ gäller

(i) $\text{grad}(p(x) \pm q(x)) \leq \max(\text{grad } p, \text{grad } q)$

(ii) $\text{grad}(p(x)q(x)) = (\text{grad } p)\cdot(\text{grad } q)$.

I ord säger (i) att vi inte kan få högre grad på $p(x)+q(x)$ eller $p(x)-q(x)$ än vad $p(x)$ och $q(x)$ redan har (men vi kan få lägre).

Ibland tänker man på ett polynom som en funktion, dvs att x skall ersättas med något tal. Sätter vi in ett tal a istället för x får vi polynomets <u>värde</u> i a.

Exempel: Om $p(x) = 5x^3 - x^2 - 3$ så är

$$p(-2) = 5(-2)^3 - (-2)^2 - 3 = -5\cdot 8 - 4 - 3 = -47$$

och

$$p(1) = 5 - 1 - 3 = 1.$$

Precis som för heltalen $\mathbb{Z}$ går en division inte alltid jämnt upp, utan det blir en rest kvar. Om $p(x)$ och $q(x)$ är polynom är det alltså inte säkert att $\frac{p(x)}{q(x)}$ är ett polynom. Följande sats talar om hur division med rest fungerar.

Sats (Divisionsalgoritmen): Låt $a(x)$ och $b(x)$ vara polynom. Då finns det entydiga polynom $q(x)$ (kvoten) och $r(x)$ (resten) så att

$$a(x) = q(x)\,b(x) + r(x), \quad \text{med grad } r < \text{grad } b.$$

Ett sätt att komma fram till kvoten och resten är att upprepat dra bort $b(x)$ från $a(x)$ tills det inte går längre.

Vi kollar först på hur det fungerar för heltal.

Exempel: Bestäm kvot och rest för heltalsdivisionen där 7 delas på 2.

Vi får

$$7 = 1\cdot 2 + 5 = 2\cdot 2 + 3 = 3\cdot 2 + 1$$

rest

kvot

större än 2, fortsätt dra bort

För polynom ser detta lite krångligare ut.

Exempel: Bestäm kvot och rest då x^3-3x+1 delas med $x+2$.

Vi får

$$x^3-3x+1 = \underbrace{x^2(x+2)}_{x^3+2x^2} - 2x^2+1 = \underbrace{x^2(x+2)}_{x^3+2x^2} \underbrace{-\,2x(x+2)}_{-2x^2-4x} + x+1 =$$

$$= \underbrace{x^2(x+2)-2x(x+2)}_{x^3-4x} + \underbrace{1\cdot(x+2)}_{+x+2} - 1 = [\text{bryt ut } (x+2)] =$$

$$= (x^2-2x+1)(x+2) - 1.$$

Kvoten blir x^2-2x+1 och resten blir -1.

Kontroll visar att

$$(x^2-2x+1)(x+2) - 1 = x^3+2x^2-2x^2-4x+x+2-1 = x^3-3x+1$$

och $\operatorname{grad}(-1) = 0 < \operatorname{grad}(x+2) = 1$.

Uppställningen i exemplet blir lätt rörig, och det finns bättre sätt.

Exempel: Bestäm kvot och rest då x^3-3x+1 delas med $x+2$.

Steg 1: Ställ up $\begin{array}{r|l} & = \\ x+2 & \overline{x^3-3x+1} \end{array}$

Steg 2: Lista ut vad detta (x) skall multipliceras med för att ge detta (x^3).

Här får vi x^2.

Steg 3: Skriv x^2 här.

$$\begin{array}{r|l} & = x^2 \\ \hline x+2 & x^3 - 3x - 1 \\ & -(x^3 + 2x^2) \\ \hline & -2x^2 - 3x - 1 \end{array}$$

Steg 4: Drag bort $x^2(x+2)$,
se vad som blir kvar

Steg 5: Lista ut vad x (högstagradstermen i $x+2$)
skall multipliceras med för att ge $-2x^2$.

Det måste vara $-2x$.

Steg 6: Skriv $-2x$ här.

$$\begin{array}{r|l} & = x^2 - 2x \\ \hline x+2 & x^3 - 3x - 1 \\ & -(x^3 + 2x^2) \\ \hline & -2x^2 - 3x - 1 \\ & -(-2x^2 - 4x) \\ \hline & x - 1 \end{array}$$

Steg 7: Drag bort $-2x(x+2)$,
se vad som blir kvar

Steg 8: Lista ut vad x skall
multipliceras för att ge x.
Det måste vara 1

⋮

Steg sist: Konstatera att $x+2$ har högre grad
än det som står längst ner i uppställningen,
så att vi är klara.

Lämpligen görs alla stegen
i en gemensam uppställning.
Uppställningen till höger visar alla
beräkningarna, och överst står kvoten
och underst står resten.

$$\begin{array}{r|l} & = x^2 - 2x + 1 \\ \hline x+2 & x^3 - 3x + 1 \\ & -(x^3 + 2x^2) \\ \hline & -2x^2 - 3x + 1 \\ & -(-2x^2 - 4x) \\ \hline & x + 1 \\ & -(x+2) \\ \hline & -1 \end{array}$$

Exempel: Bestäm kvot och rest då x^4+4 delas på x^2+2x+2.

Enligt uppställningen blir

$$
\begin{array}{r l}
 & = x^2-2x+2 \quad \leftarrow \text{kvot} \\
x^2+2x+2 \,\big) & x^4+4 \\
 & -(x^4+2x^3+2x^2) \\
 & \quad -2x^3-2x^2+4 \\
 & \quad -(-2x^3-4x^2-4x) \\
 & \qquad 2x^2+4x+4 \\
 & \qquad -(2x^2+4x+4) \\
 & \qquad\qquad 0 \quad \leftarrow \text{rest}
\end{array}
$$

Alltså är $x^4+4 = (x^2-2x+2)(x^2+2x+2)+0$.

Anmärkning: När resten blir noll säger vi att divisionen går jämnt upp.

Exempel: Om $a(x)=x^2+3x+2$ och $b(x)=x-1$, bestäm kvot och rest då $a(x)$ delas på $b(x)$ respektive då $b(x)$ delas på $a(x)$.

I det första fallet, då $a(x)$ delas på $b(x)$, får vi

$$
\begin{array}{r l}
 & = x+4 \\
x-1 \,\big) & x^2+3x+2 \\
 & -(x^2-x) \\
 & \quad 4x+2 \\
 & \quad -(4x-4) \\
 & \qquad 6
\end{array}
$$

så kvoten är $x+4$ och resten är 6.

Vi ser att $x^2+3x+2 = \underbrace{(x+4)(x-1)}_{\substack{=x^2-x+4x-4 \\ =x^2+3x-4}} + 6$.

I det andra fallet, då $b(x)$ delas på $a(x)$, får vi

$$\begin{array}{r|l} & = 0 \\ \hline x^2+3x+2 & x-1 \\ & -(0) \\ \cline{2-2} & x-1 \end{array}$$

så kvoten blir noll och resten $x-1$.

Det stämmer ju att $x-1 = 0 \cdot (x^2+3x+2) + x-1$.