MVE425 Matematik, del A, hösten 2018, föreläsning 12

Mårten Wadenbäck

Faktorsatsen och satsen om heltalsrötter

Exempel: Bestäm resten då $p(x)=x^2+5x+8$ delas med $x-a$.

Vi ställer upp det som vanligt:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+a+5 \\
\hline
x-a & x^2+5x+8 \\
 & -(x^2-ax) \\
\hline
 & (a+5)x+8 \\
 & -((a+5)x-a^2-5a) \\
\hline
 & a^2+5a+8
\end{array}
$$

Resten blev $p(a)$!

Det som hände i exemplet var ingen slump, utan en nödvändig konsekvens av följande sats.

Sats: Om polynomet $p(x)$ delas med $x-a$ blir resten alltid $p(a)$.

Bevis: Enligt divisionsalgoritmen finns det polynom $q(x)$ och $r(x)$ med $\text{grad}\, r < \text{grad}(x-a)=1$ så att

$$p(x)=(x-a)q(x)+r(x).$$

Eftersom $\text{grad}\, r<1$ måste $r(x)=K$ vara konstant, och värdet måste ges av

$$p(a)=(a-a)q(a)+K=K.$$

Ett särskilt viktigt fall är då resten blir noll, dvs då divisionen går jämnt upp.

Sats (Faktorsatsen): Om $x=a$ är ett nollställe till polynomet $p(x)$, dvs $p(a)=0$, så finns det ett polynom $q(x)$ så att $p(x)=(x-a)q(x)$.

Bevis: (Beviset är likadant som för förra satsen.)

Enligt divisionsalgoritmen finns det polynom $q(x)$ och $r(x)$ med $\text{grad}\, r < \text{grad}(x-a)=1$ så att

$$p(x)=(x-a)q(x)+r(x).$$

Eftersom $\text{grad}\, r<1$ måste $r(x)=K$ vara konstant, och värdet måste ges av

$$p(a)=(a-a)q(a)+K=K.$$

Eftersom $p(a)=0$ blir $K=r(x)=0$, så $p(x)=(x-a)q(x)$.

Faktorsatsen kan användas bland annat för att lösa polynomekvationer där man lyckats hitta/gissa någon lösning.

Exempel: Hitta alla lösningar till ekvationen $x^3+6x^2+5x-12=0$.

En fågel viskar att $x=1$ är en lösning, och enligt faktorsatsen är då $x-1$ en faktor i $x^3+6x^2+5x-12$.

Vi utför polynomdivision för att få fram den andra faktorn.

Vanliga uppställningen ger:

$$\begin{array}{rl} & = x^2+7x+12 \\ x-1 \,\big| & x^3+6x^2+5x-12 \\ & -(x^3-x^2) \\ & \quad 7x^2+5x-12 \\ & \quad -(7x^2-7x) \\ & \qquad 12x-12 \\ & \qquad -(12x-12) \\ & \qquad\quad 0 \end{array}$$

Resten blir (som förväntat!) noll och kvoten blir $x^2+7x+12$. Alltså är

$$x^3+6x^2+5x-12=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+7x+12)=0.$$

Enligt nollfaktorlagen är $x-1=0$ eller $x^2+7x+12=0$. Den senare andragradsekvationen har lösningarna

$$x=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2-12}=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}-\frac{48}{4}}=-\frac{7}{2}\pm\frac{1}{2}.$$

Alla lösningar till $x^3+6x^2+5x-12=0$ är alltså $x=1$, $x=-4$, och $x=-3$.

Att lösa polynomekvationer av hög grad är svårt. Om polynomets grad är högre än fyra finns inga metoder som alltid fungerar, men även grad tre och fyra är besvärliga. Som en följd av algebrans fundamentalsats finns det högst n reella lösningar till en polynomekvation av grad n. Som tur är går det att hitta alla heltalslösningar.

Sats (Satsen om heltalsrötter): Låt $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ vara ett polynom med heltalskoefficienter $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Om $x \neq 0$ är ett heltal som uppfyller ekvationen $p(x) = 0$ måste konstanttermen a_0 vara delbar med x.

Exempel: Vi såg att lösningarna till $x^3 + 6x^2 + 5x - 12 = 0$ är $x = 1$, $x = -4$, och $x = -3$. Konstanttermen i polynomet är -12, som är delbart med 1, -4, och -3.

Bevis av satsen om heltalsrötter: Låt x vara en heltalslösning till polynomekvationen, dvs ett heltal som uppfyller $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$. Genom att flytta över allt utom a_0 till högerledet får vi $a_0 = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \ldots - a_1 x$. Alla termer i högerledet innehåller minst en faktor x som kan brytas ut: $a_0 = x(-a_n x^{n-1} - a_{n-1} x^{n-2} - \ldots - a_1)$. Eftersom $\frac{a_0}{x} = -a_n x^{n-1} - a_{n-1} x^{n-2} - \ldots - a_1$ är ett heltal är a_0 delbar med x.

Om vi hittar lösningar med satsen om heltalsrötter kan vi sedan använda faktorsatsen och polynomdivision för att få en ekvation av lägre grad som vi förhoppningsvis kan hantera.

Exempel: Bestäm alla lösningar till ekvationen $x^4+6x^3+3x^2-12x-10=0$.

Ekvationen har heltalskoefficienter, så vi kan använda satsen om heltalslösningar. Konstanttermen är -10, och vi hittar alla tal som delar -10 genom att faktorisera $-10=-1\cdot 2\cdot 5$. Ur detta ser vi att kandidaterna är ± 1 (alltid), ± 2, ± 5, och ± 10. Insättning i ekvationen:

$$p(1)=1+6+3-12-10=-12\neq 0$$
$$p(-1)=1-6+3+12-10=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1 \text{ är en lösning}$$
$$p(2)=16+48+12-24-10=42\neq 0$$
$$p(-2)=16-48+12+24-10=-6\neq 0$$
$$p(5)=625+750+75-60-10=1380\neq 0$$
$$p(-5)=625-750+75+60-10=0 \quad \Rightarrow \quad x=-5 \text{ är en lösning}$$
$$p(10)=10000+6000+300-120-10=16170\neq 0$$
$$p(-10)=10000-6000+300+120-10=4410\neq 0$$

Eftersom $x=-1$ är en lösning säger faktorsatsen att det måste finnas en faktor $x+1$ (dvs $x-(-1)$) i polynomet $x^4+6x^3+3x^2-12x-10$, så att $x^4+6x^3+3x^2-12x-10=(x+1)Q(x)$ för något polynom $Q(x)$. Vi vet även att $x=-5$ är ett nollställe, och eftersom det inte är ett nollställe till $x+1$ måste det vara ett nollställe till $Q(x)$. Enligt faktorsatsen måste det alltså finnas en faktor $x+5$ (dvs $x-(-5)$) i $Q(x)$, så att $Q(x)=(x+5)q(x)$ för något polynom $q(x)$. Detta betyder att $x^4+6x^3+3x^2-12x-10=(x+1)Q(x)=(x+1)(x+5)q(x)$, och vi kan bestämma $q(x)$ genom att dela med polynomet $(x+1)(x+5)=x^2+6x+5$:

$$
\begin{array}{r|l}
 & = x^2-2 \quad \longleftarrow q(x) \\
\hline
x^2+6x+5 & x^4+6x^3+3x^2-12x-10 \\
 & -(x^4+6x^3+5x^2) \\
\hline
 & \quad -2x^2-12x-10 \\
 & \quad -(-2x^2-12x-10) \\
\hline
 & \qquad 0
\end{array}
$$

Vi har alltså $x^4+6x^3+3x^2-12x-10=(x+1)(x+5)(x^2-2)$, och om detta skall vara noll måste någon av parenteserna vara noll. Detta sker då $x=-1$, $x=-5$, och $x=\pm\sqrt{2}$, som alltså är ekvationens lösningar.