Mårten Wadenbäck

Faktoruppdelning och algebraiska uttryck

Som vi såg i samband med polynom kan vi ofta räkna på samma (eller åtminstone snarlikt) sätt när vi har algebraiska uttryck som när vi har vanliga tal. Om vi har att göra med bråk vars täljare och nämnare båda är polynom i x (ett så kallat rationellt uttryck i x) kan vi förlänga, förkorta, addera, subtrahera, multiplicera, och dividera som vanligt.

Exempel: Skriv $\frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{2+3x}$ som ett bråk på så enkel form som möjligt.

Nämnarna är olika, så vi behöver förlänga bråken:

$$\frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{2+3x} = \frac{x(2+3x)}{(x^2+1)(2+3x)} - \frac{3(x^2+1)}{(2+3x)(x^2+1)} =$$

$$= \frac{2x+3x^2-3x^2-3}{(x^2+1)(2+3x)} = \frac{2x-3}{(x^2+1)(2+3x)}.$$

Här finns inga gemensamma faktorer i täljaren och nämnaren som går att förkorta bort, så i detta fallet blev vi klara här.

Exempel: Skriv $\frac{x}{x^2-4} + \frac{2x+2}{x^2+4x+4}$ som ett bråk på så enkel form som möjligt.

Om vi gör på samma sätt som tidigare blir

$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{2x+2}{x^2+4x+4} = \frac{x(x^2+4x+4)}{(x^2-4)(x^2+4x+4)} + \frac{(2x+2)(x^2-4)}{(x^2-4)(x^2+4x+4)} =$$

$$= \frac{x^3+4x^2+4x+2x^3-8x+2x^2-8}{(x^2-4)(x^2+4x+4)} = \frac{3x^3+6x^2-4x-8}{(x^2-4)(x^2+4x+4)}.$$

Med lite mer eftertanke ser vi med konjugat- och kvadreringsreglerna att

$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{2x+2}{x^2+4x+4} = \frac{x}{(x+2)(x-2)} + \frac{2x+2}{(x+2)^2},$$

så istället för att blint förlänga kan vi istället ordna en minsta gemensam nämnare (av minsta grad):

$$\frac{x^2}{x^2-4} + \frac{2x+2}{x^2+4x+4} = \frac{x^2(x+2)}{(x+2)^2(x-2)} + \frac{(2x+2)(x-2)}{(x+2)^2(x-2)} =$$

$$= \frac{x^3+2x^2+2x^2-4x+2x-4}{(x+2)^2(x-2)} = \frac{x^3+4x^2-2x-4}{(x+2)^2(x-2)}.$$

Detta är enklare än det vi fick först, men kan vi vara säkra på att det inte går att förkorta ännu mer? Här kommer faktorsatsen till nytta, eftersom den säger att täljaren innehåller en faktor $x-a$ precis då $x=a$ är ett nollställe. Då varken $x=2$ eller $x=-2$ är nollställen finns inte faktorn $x-2$ eller faktorn $x+2$ i täljaren.

För att effektivt kunna räkna med rationella uttryck (och även i andra sammanhang) ser vi att det är viktigt att kunna faktorisera (ibland kallat faktoruppdela) uttrycken i täljaren och nämnaren.

Det går (men är svårt!) att bevisa att alla polynom kan skrivas på formen

$$p(x) = k(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\cdots(x-a_r)^{m_r}\cdot((x-b_1)^2+c_1^2)^{n_1}\cdots((x-b_s)^2+c_s^2)^{n_s},$$

där $a_1,\dots,a_r$ är polynomets nollställen, $k\neq 0$, och där talen $m_1,\dots,m_r$, $n_1,\dots,n_s$, r och s är positiva heltal.

Faktorsatsen säger att varje nollställe ger upphov till en faktor i polynomet, men det kan även finnas faktorer som saknar nollställen (faktorer av typen $((x-b)^2+c^2)^n$ där $c\neq 0$)!

Exempel: Skriv $\dfrac{x+3}{(x^2+1)^2}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1-3x}{x(x^2+1)^2}$ som ett bråk på så enkel form som möjligt.

Vi förlänger till den minsta gemensamma nämnaren och adderar:

$$\frac{x+3}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{x}+\frac{1-3x}{x(x^2+1)^2}=\frac{x(x+3)}{x(x^2+1)^2}+\frac{(x^2+1)^2}{x(x^2+1)^2}+\frac{1-3x}{x(x^2+1)^2}=$$

$$= \frac{x^2+3x \quad + x^4+2x^2+1 \quad +1-3x}{x(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2+2}{x(x^2+1)^2}.$$

Det är inte säkert att detta är så enkelt det kan bli. Möjliga faktorer att förkorta är de som finns i nämnaren, dvs x eller x^2+1. Det är tydligt att x inte är en faktor i täljaren, men är x^2+1 det?

Vi testar att dela täljaren med x^2+1 och ser om det går jämnt upp eller inte:

$$\begin{array}{r|l} & = x^2+2 \\ \hline x^2+1 & x^4+3x^2+2 \\ & -(x^4+x^2) \\ \hline & \quad 2x^2+2 \\ & -(2x^2+2) \\ \hline & \quad 0 \end{array}$$

Eftersom resten blev noll gick divisionen jämnt upp, och vi får (fortsatt från ovan)

$$\frac{x^4+3x^2+2}{x(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)(x^2+2)}{x(x^2+1)^2} = \frac{x^2+2}{x(x^2+1)}.$$

Härifrån går det inte att förenkla längre, så svaret är alltså $\frac{x^2+2}{x(x^2+1)}$.

Vid faktoruppdelning av polynom och andra uttryck är det till stor hjälp att ha ett skarpt öga för kvadreringsreglerna och konjugatregeln, och även för följande:

(i) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ (sedan tidigare)

(ii) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

För att bevisa dessa formler behöver vi bara multiplicera ihop parenteserna.

Exempel: Faktorisera polynomet $8x^3+2x^2+x+1$.

Med vårt skarpa öga ser vi att

$$
\begin{aligned}
8x^3+2x^2+x+1 &= 8x^3+1 \quad +2x^2+x= \\
&= (2x)^3+1+2x^2+x = [\text{använd regel (ii)}]= \\
&= (2x+1)((2x)^2-2x+1) \quad +(2x+1)x= \\
&= (2x+1)(\,4x^2-2x+1 \quad +x)=(2x+1)(4x^2-x+1).
\end{aligned}
$$

För att se om den sista parentesen kan faktoriseras ytterligare kan vi kvadratkomplettera inuti den:

$$
(2x+1)(4x^2-x+1)=(2x+1)\Big(\underbrace{(2x)^2-2\cdot\tfrac{1}{4}\cdot 2x+\left(\tfrac{1}{4}\right)^2}_{(2x-\frac{1}{4})^2}-\left(\tfrac{1}{4}\right)^2+1\Big)=
$$

$$
=(2x+1)\Big(\underbrace{\left(2x-\tfrac{1}{4}\right)^2+\tfrac{15}{16}}_{\text{saknar nollställen}}\Big).
$$

Det går inte att faktorisera vidare, så $8x^3+2x^2+x+1=(2x+1)(4x^2-x+1)$.