Mårten Wadenbäck

Intervall och olikheter

Med hjälp av ordningsrelationerna för de reella talen definierar vi olika typer av intervall:

(i) öppna intervall, $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}:\ a<x<b\}$

(ii) slutna intervall, $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}:\ a\leq x\leq b\}$

(iii) halvöppna intervall,

$$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}:\ a<x\leq b\} \text{ och } [a,b)=\{x\in\mathbb{R}:\ a\leq x<b\}.$$

Vi kan låta $a=-\infty$ och/eller $b=\infty$ och få obegränsade intervall, om intervallet är öppet i den obegränsade ändan.

Anmärkning: Ett intervall är en mängd, och att x tillhör ett visst intervall skrivs därför $x\in[a,b)$ eller liknande.

Anmärkning: Om båda ändarna är obegränsade får vi hela talaxeln, dvs $(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$.

Vi erinrar oss räknereglerna

1. $[a<b]\wedge[b<c] \Rightarrow a<c$,
2. $a<b \Rightarrow a+c<b+c$,
3. $[a<b]\wedge[c<d] \Rightarrow a+c<b+d$,
4. $a<b \Rightarrow \begin{cases} ac<bc & \text{om } c>0 \\ ac=bc=0 & \text{om } c=0 \\ ac>bc & \text{om } c<0. \end{cases}$

Exempel: Vilket intervall måste x tillhöra om $2x+6<10$,

$-4 \le 3x$, och $-2x \le 1$ gäller?

Vi skriver om var och en av olikheterna så att x blir ensamt på en sida:

$$2x+6<10 \iff 2x<4 \iff x<2,$$

$$-4 \le 3x \iff -\frac{4}{3} \le x, \quad \text{och}$$

$$-2x \le 1 \iff x \ge -\frac{1}{2}.$$

På tallinjen ser intervallen ut som i figuren:

Området som inkluderas i alla tre är då $-\frac{1}{2} \le x < 2$, så vi kan skriva det sökta intervallet som $[-\frac{1}{2}, 2)$.

Ibland behöver vi säga att x tillhör något av flera intervall, där intervallen inte sitter ihop. Då kan vi använda mängdoperationen <u>union</u>, som definieras av $A \cup B = \{x : [x \in A] \vee [x \in B]\}$.

Exempel: Om x får vara vilket reellt tal som helst förutom talen i intervallet $(a,b]$ får ju $x \le a$ eller $x > b$, dvs $x \in (-\infty, a]$ eller $x \in (b, \infty)$. Vi kan skriva detta med unionsbeteckning som $x \in (-\infty, a] \cup (b, \infty)$.

Exempel: För vilka x gäller att $(x+2)(2x-3)(3x-5)>0$?

Om produkten av tre tal är positiv säger teckenreglerna oss att antingen är alla talen positiva eller så är ett positivt och två negativa. Undersökning av parenteserna visar att

$$x+2>0 \Leftrightarrow x>-2 \quad \text{och} \quad x+2<0 \Leftrightarrow x<-2,$$
$$2x-3>0 \Leftrightarrow x>\tfrac{3}{2} \quad \text{och} \quad 2x-3<0 \Leftrightarrow x<\tfrac{3}{2},$$
$$3x-5>0 \Leftrightarrow x>\tfrac{5}{3} \quad \text{och} \quad 3x-5<0 \Leftrightarrow x<\tfrac{5}{3},$$

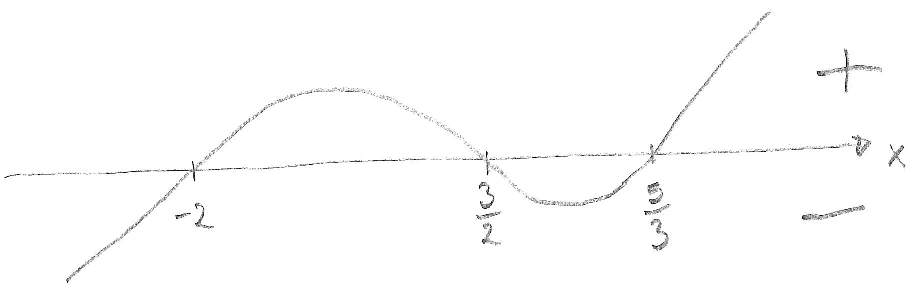
dvs det sker teckenbyten då $x=-2$, $x=\frac{3}{2}$, och $x=\frac{5}{3}$.

Vi kan göra följande teckentabell:

x	$x<-2$	-2	$-2<x<\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}<x<\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}<x$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3x-5$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)(2x-3)(3x-5)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Av tabellen framgår att $(x+2)(2x-3)(3x-5)>0$ då $-2<x<\frac{3}{2}$ eller $\frac{5}{3}<x$, dvs då $x\in(-2,\frac{3}{2})\cup(\frac{5}{3},\infty)$.

Ett alternativt sätt att illustrera tabellen är följande:



(Observera att detta inte nödvändigtvis visar grafen!)

Exempel: Lös olikheten $\frac{x}{x-2}<1$, dvs bestäm alla x för vilka olikheten gäller.

En idé är att multiplicera båda sidorna med $x-2$ för att slippa $x-2$ i nämnaren. Ett problem som då uppstår är att vi inte vet om $x-2$ är positivt eller negativt (vi vet att det inte är noll). Vi kan dela upp i två fall.

Om $x-2>0$ får vi $\frac{x}{x-2}<1 \Leftrightarrow x<x-2 \Leftrightarrow 0<-2$, som inte gäller för några x.

Om $x-2<0$ måste vi vända olikheten när vi multiplicerar, och får då $\frac{x}{x-2}<1 \Leftrightarrow x>x-2 \Leftrightarrow 0>-2$, som gäller för alla x (dvs alla x där $x-2<0$).

Sammanfattningsvis har vi fått fram att $\frac{x}{x-2}<1$ gäller för alla $x<2$.

Anmärkning: Exemplet visar att att vi måste vara försiktiga när vi multiplicerar med uttryck som beror av x i olikheter. Vi skall senare se ett bättre sätt att hantera sådana olikheter.