Mårten Wadenbäck

Lösning av olikheter och dubbelolikheter

Som vi såg förra föreläsningen är det besvärligt att multiplicera med uttryck som innehåller x i en olikhet, eftersom vi måste hålla reda på om uttrycket var positivt eller negativt (så att vi måste vända olikheten).

Som tur är behövs detta inte för att lösa olikheter, utan vi kan istället använda följande metod:

Steg 1: Samla allt på samma sida, och sätt på gemensamt bråkstreck (om det är bråk).

Steg 2: Faktoruppdela (täljare och nämnare).

Steg 3: Gör en teckentabell.

Steg 4: Sammanfatta.

Exempel: Lös olikheten $\frac{4x+2}{x+3} > \frac{2x-1}{x+4}$.

Vi följer den föreslagna metoden, och börjar med att flytta allt till samma sida och till ett gemensamt bråkstreck:

$$\frac{4x+2}{x+3} > \frac{2x-1}{x+4} \Leftrightarrow \frac{4x+2}{x+3} - \frac{2x-1}{x+4} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(4x+2)(x+4)-(2x-1)(x+3)}{(x+3)(x+4)} > 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2+16x+2x+8-2x^2-6x+x+3}{(x+3)(x+4)} > 0 \Leftrightarrow$$

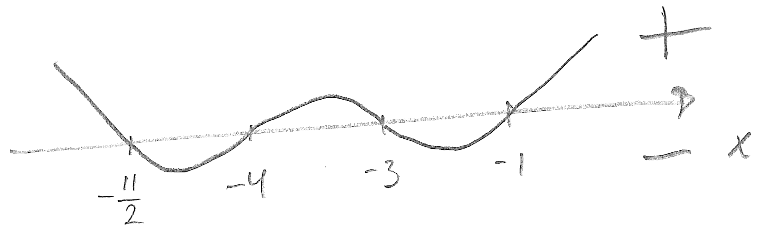
$$\frac{2x^2+13x+11}{(x+3)(x+4)} > 0.$$

Nämnaren är ju redan faktoriserad, men vi behöver även faktorisera täljaren, om det går. Detta kan vi göra genom att titta på ekvationen $2x^2+13x+11=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{13}{2}x+\frac{11}{2}=0$, vars lösningar är $x=-\frac{13}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^2-\frac{11}{2}} = -\frac{13}{4}\pm\sqrt{\frac{169}{16}-\frac{88}{16}} = -\frac{13}{4}\pm\frac{9}{4}$.

Detta betyder att $2x^2+13x+11 = 2\left(x+\frac{11}{2}\right)(x+1)$, så olikheten blir

$$\frac{2\left(x+\frac{11}{2}\right)(x+1)}{(x+3)(x+4)} > 0.$$

Teckenväxlingar kan ske då $x=-\frac{11}{2}$, $x=-4$, $x=-3$, och $x=-1$. Vi kan nu göra en teckentabell:



Vi kan nu avläsa att $\frac{4x+2}{x+3} > \frac{2x-1}{x+4}$ då

$x \in \left(-\infty, -\frac{11}{2}\right) \cup (-4,-3) \cup (-1,\infty)$.

Anmärkning: Det måste inte ske en teckenväxling för alla x som gör någon faktor till noll! Anledningen är att det kan finnas en till likadan faktor som "byter tillbaka".

Exempel: Lös olikheten $\frac{17}{x+1} < \frac{6}{x} + \frac{10x}{(x+1)^2}$.

Vi börjar med att flytta allt till samma sida och ett gemensamt bråkstreck:

$$\frac{17}{x+1} < \frac{6}{x} + \frac{10x}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \frac{17}{x+1} - \frac{6}{x} - \frac{10x}{(x+1)^2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{17x(x+1) - 6(x+1)^2 - 10x^2}{x(x+1)^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{17x^2+17x-6x^2-12x-6-10x^2}{x(x+1)^2} < 0 \Leftrightarrow$$

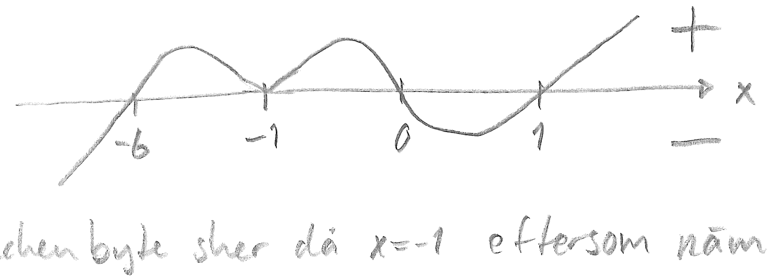
$$\frac{x^2+5x-6}{x(x+1)^2} < 0.$$

Täljaren faktoriseras genom att vi bestämmer nollställena

$$x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+6} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}+\frac{24}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{7}{2},$$ så

att $x^2+5x-6 = (x+6)(x-1)$.

Vi gör nu en teckentabell för $\frac{(x+6)(x-1)}{x(x+1)^2}$:



Inget teckenbyte sker då $x=-1$ eftersom nämnaren har två nollställen där. Vi avläser att $\frac{17}{x+1} < \frac{6}{x} + \frac{10x}{(x+1)^2}$ då $x \in (-\infty,-6) \cup (0,1)$.

Vi kan hantera dubbelolikheter, dvs olikheter av typen $a<b<c$. Dessa löser vi genom att dela upp i vänster olikhet $a<b$ och höger olikhet $b<c$, och sedan titta på deras gemensamma lösningar. Detta går förstås att utöka till fler än två olikheter.

Exempel: Lös dubbelolikheten $2x-5\le x^2-6\le 3x+10$.

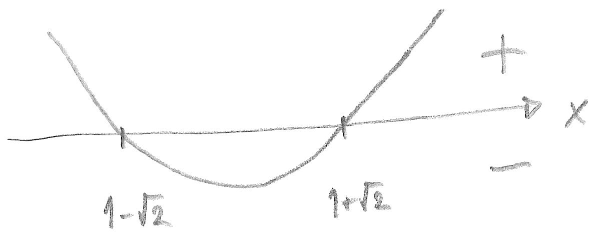
Vi börjar med vänster olikhet, $2x-5\le x^2-6$.

Flytt av allting till högerledet ger $0\le x^2-2x-1$.

För att faktorisera x^2-2x-1 letar vi upp dess nollställen, som är $x=1\pm\sqrt{1+1}=1\pm\sqrt{2}$.

Detta betyder att $x^2-2x-1=(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$.

Teckentabellen för uttrycket blir



Vi avläser att $2x-5\le x^2-6$ då $x\le 1-\sqrt{2}$ eller $x\ge 1-\sqrt{2}$, eller med intervallbeteckning, $x\in(-\infty,1-\sqrt{2}]\cup[1+\sqrt{2},\infty)$.

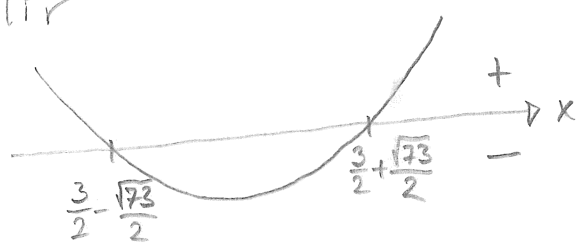
Nu behandlar vi höger olikhet, $x^2-6\le 3x+10$.

Flytt av allt till vänster sida ger $x^2-3x-16\le 0$.

Faktorisering av $x^2-3x-16$ gör vi genom att hitta dess nollställen, som är

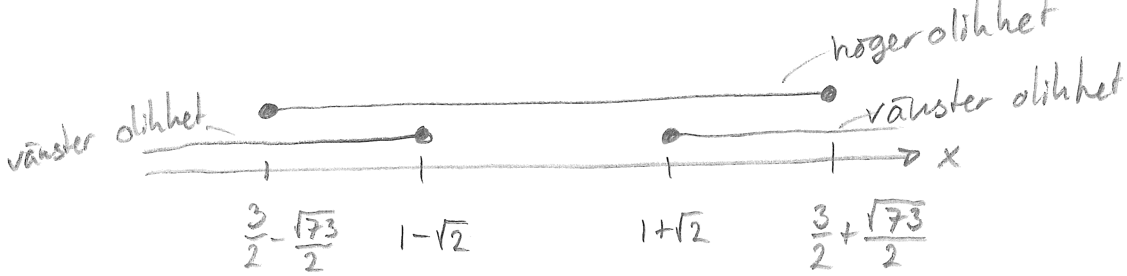
$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+16} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{64}{4}} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{73}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{73}}{4}.$$

Alltså är $x^2-3x-16 = \left(x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{73}}{4}\right)\left(x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{73}}{4}\right)$, vars teckentabell blir



Detta säger oss att $x^2-6 \leq 3x+10$ då $x \in \left[\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{73}}{2}, \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{73}}{2}\right]$.

Vi skall nu sammanställa när båda olikheterna gäller, och det gör vi genom att markera intervallen på en tallinje:



Dubbelolikheten gäller alltså då $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{73}}{2} \leq x \leq 1-\sqrt{2}$ eller då $1+\sqrt{2} \leq x \leq \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{73}}{2}$.