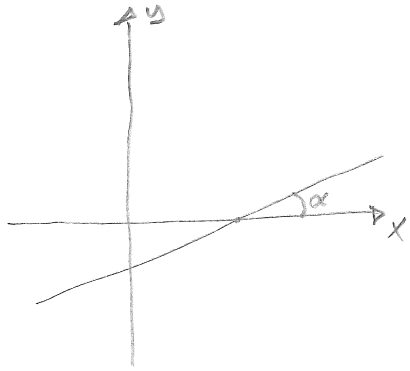
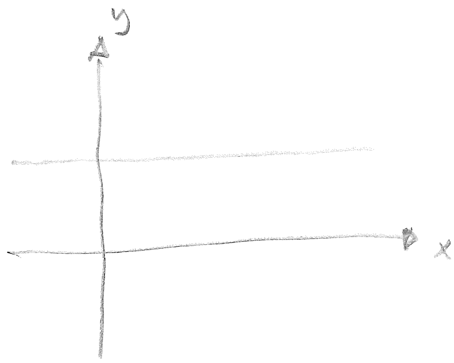
Mårten Wadenbäck

Räta linjen

Vi skall nu studera räta linjer i planet, och deras koordinatframställning. Vi börjar med linjens lutning, och får då betrakta två fall, nämligen

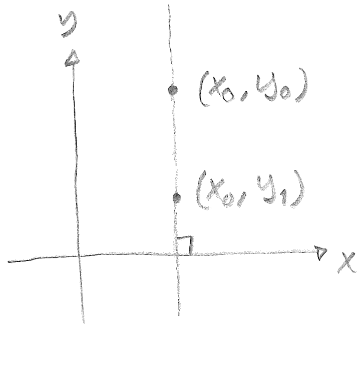


Fall 1: Linjen skär x-axeln i en punkt, och då definieras lutningsvinkeln som vinkeln moturs från x-axeln till linjen.

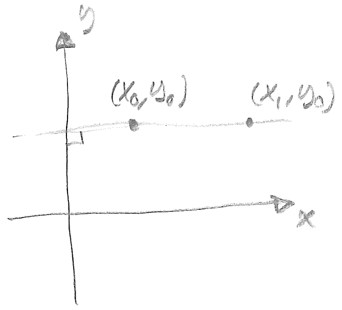


Fall 2: Linjen skär inte x-axeln, eller linjen är x-axeln, och då definierar vi lutningsvinkeln att vara $0°$.

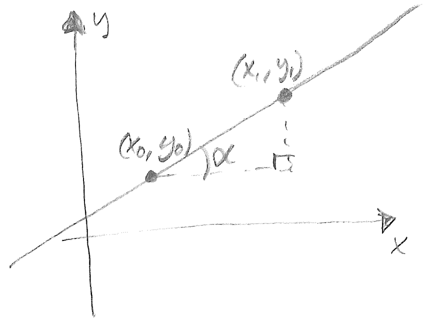
En linje bestäms entydigt av två punkter på linjen, och följaktligen går lutningsvinkeln också att få fram om vi känner till två punkter på linjen, och här får vi tre fall:



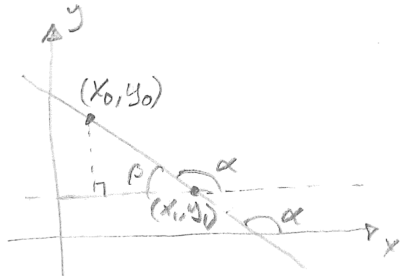
1. De två punkterna har samma x-värde, och då skär linjen x-axeln under rät vinkel. Lutningsvinkeln är $90°$.



2. De två punkterna har samma y-värde, och då är linjen parallell med x-axeln. Dess lutningsvinkel är $0°$.



3. Punkternas x- respektive y-värden är skilda. Om linjen lutar uppåt får vi fram lutningsvinkeln α enligt $\tan\alpha = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \Leftrightarrow$ $\alpha = \arctan\left(\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right)$.



Om linjen lutar nedåt får vi lutningsvinkeln α som $\alpha = 180° - \beta$, där $\tan\beta = \frac{y_0-y_1}{x_1-x_0} \Leftrightarrow \beta = \arctan\left(\frac{y_0-y_1}{x_1-x_0}\right)$.

Exempel: Bestäm lutningsvinkeln för linjen som går genom punkterna $(2,1)$ och $(4, 1-\frac{2}{\sqrt{3}})$.

Eftersom $(4, 1-\frac{2}{\sqrt{3}})$ är till höger om $(2,1)$ och har ett lägre y-värde lutar linjen nedåt. Lutningsvinkeln blir därför

$$\alpha = 180° - \arctan\left(\frac{1-(1-\frac{2}{\sqrt{3}})}{4-2}\right) = 180° - \arctan\left(\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{2}\right) =$$

$$= 180° - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 180° - 30° = 150°.$$

Anmärkning: Eftersom $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = \frac{-1\cdot(y_0-y_1)}{-1\cdot(x_0-x_1)} = \frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$, och på samma sätt $\frac{y_0-y_1}{x_1-x_0} = \frac{y_1-y_0}{x_0-x_1}$, spelar det ingen roll vilken av punkterna som är (x_0,y_0) och vilken som är (x_1,y_1).

Ett annat, vanligare sätt att beskriva en linjes lutning är genom dess <u>riktningskoefficient</u>, som definieras som $k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, där (x_0, y_0) och (x_1, y_1) är olika punkter på linjen. Om $x_1 = x_0$ är linjen vertikal och saknar riktningskoefficient (den hade blivit oändligt stor).

Exempel: Linjen genom punkterna $(2,1)$ och $(4, 1-\frac{2}{\sqrt{3}})$ har riktningskoefficienten $k = \frac{1-\frac{2}{\sqrt{3}}-1}{4-2} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vi har följande samband mellan lutningsvinkeln α och riktningskoefficienten k:

(i) Om $0° \leq \alpha < 90°$ så är

$$k = \tan\alpha \iff \alpha = \arctan k.$$

(ii) Om $90° < \alpha < 180°$ så är

$$-k = \tan(180° - \alpha) \iff \arctan(-k) = 180° - \alpha \iff$$
$$\alpha = 180° - \arctan(-k).$$

Överlag är riktningskoefficienten lättare att arbeta med än lutningsvinkeln, men om man av någon anledning behöver lutningsvinkeln går den alltid att få fram enligt formlerna ovan.

Exempel: Bestäm skärningspunkten och skärningsvinkeln (minsta vinkeln mellan linjerna) för de två linjerna

$2x-2y=4$ och $y=-\sqrt{3}x-1$.

Vi börjar med skärningspunkten. Om linjerna har en gemensam punkt (x,y) måste

$$\begin{cases} 2x-2y=4 \\ y=-\sqrt{3}x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y=4 \\ \sqrt{3}x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y=4 \\ (2+2\sqrt{3})x \quad =2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x-2y=4 \\ x=\dfrac{2}{2+2\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y=4 \\ x=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y=4 \\ x=\dfrac{1-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x-2y=4 \\ x=\dfrac{1-\sqrt{3}}{1-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y=4 \\ x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}-1-2y=4 \\ x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ -2y=5-\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{3}-5}{2}. \end{cases}$$

Linjerna skär varandra i punkten $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}-5}{2}\right)$.

För att bestämma vinkeln mellan linjerna kan vi använda deras lutningsvinklar. För linjen $2x-2y=4$ får vi

$$2x-2y=4 \Leftrightarrow 2y=2x-4 \Leftrightarrow y=x-2,$$

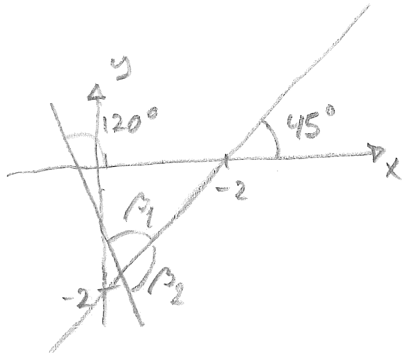
så riktningskoefficienten är $k_1=1$. Lutningsvinkeln blir då $\alpha_1=\arctan k_1=\arctan 1=45°$.

För linjen $y=-\sqrt{3}x-1$ är riktningskoefficienten $k_2=-\sqrt{3}$,

så lutningsvinkeln blir

$$\alpha_2=180°-\arctan(-k_2)=180°-\arctan(\sqrt{3})=180°-60°=120°.$$

Det finns två möjliga vinklar mellan linjerna, β_1 och β_2.



Vi får $\beta_1=\alpha_2-\alpha_1=120°-45°=75°$

och $\beta_2=180°-\beta_1=180°-75°=105°$,

så $\beta_1=75°$ är skärningsvinkeln (eftersom den är minst).

Det finns många olika metoder för att bestämma en ekvation för en linje, under diverse förutsättningar.

En vanligen förekommande förutsättning är att linjen vi söker skall ha en viss riktningskoefficient (eller lutningsvinkel) och gå genom en förbestämd punkt. Antag att linjen skall ha riktningskoefficienten k och passera genom (x_1, y_1).

Om (x,y) är en godtycklig (annan) punkt på linjen är

$k=\frac{y-y_1}{x-x_1}$, så att $y-y_1=k(x-x_1)$. Detta kallas <u>enpunktsformeln</u>

Genom att flytta över y_1 till högerledet får vi linjens ekvation på formen $y=kx+m$.

Exempel: Ange, på formen $y=kx+m$, ekvationen för linjen som går genom $(3,5)$ och har en lutningsvinkel som är $30°$.

Om vi omvandlar lutningsvinkeln till en riktningskoefficient kan vi använda enpunktsformeln.
En lutningsvinkel på $30°$ gör att linjen lutar uppåt, så riktningskoefficienten blir

$$k=\tan 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Enpunktsformeln ger nu $y-5=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-3) \Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-3)+5 \Leftrightarrow$

$$y=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}_{k}x+\underbrace{5-\sqrt{3}}_{m}.$$

En annan vanlig situation är att vi behöver ekvationen för en linje genom två givna punkter, (x_1,y_1) och (x_2,y_2).

Om linjen inte är vertikal har den en riktningskoefficient som är $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, och om vi sätter in detta i enpunktsformeln får vi att en godtycklig punkt (x,y) på linjen skall uppfylla $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$. Denna formel kallas tvåpunktsformeln.

Exempel: Ange, på normalform, ekvationen för linjen genom punkterna $(-2,3)$ och $(1,1)$.

Tvåpunktsformeln ger $y-3 = \frac{1-3}{1-(-2)}(x-(-2)) \Leftrightarrow y-3 = -\frac{2}{3}(x+2)$.

Vi flyttar över allt till samma sida och förenklar:

$$y-3 = -\frac{2}{3}(x+2) \Leftrightarrow \frac{2}{3}(x+2)+y-3=0 \Leftrightarrow 2(x+2)+3y-9=0 \Leftrightarrow$$

$$2x+4+3y-9=0 \Leftrightarrow 2x+3y-5=0.$$

Linjens ekvation på normalform är alltså $2x+3y-5=0$.

Exempel: Ligger någon av punkterna $(9,3)$ respektive $(7,2)$ på linjen genom $(-1,-1)$ och $(4,1)$?

Vi kan testa detta genom att se om respektive punkt uppfyller tvåpunktsformeln. För $(9,3)$ får vi

$$3-(-1) = \frac{1-(-1)}{4-(-1)}(9-(-1)) \Leftrightarrow 4 = \frac{2}{5}\cdot 10$$

som ju är sant, alltså ligger $(9,3)$ på linjen.

För $(7,2)$ får vi

$$2-(-1) = \frac{1-(-1)}{4-(-1)}(7-(-1) \Leftrightarrow 3 = \frac{2}{5}\cdot 8$$

som ju inte stämmer, så $(7,2)$ ligger inte på linjen genom $(-1,-1)$ och $(4,1)$.