Mårten Wadenbäck

Mer om räta linjer

Vi skall nu se vad som händer då vi har två linjer som antingen är parallella eller vinkelräta. Här nöjer vi oss med att bry oss om fallen då linjerna inte är parallella med x-axeln eller y-axeln.

Notation: Om en linje l_1 är parallell med en linje l_2 skrivs detta $l_1 \parallel l_2$. Om en linje l_1 är vinkelrät (ortogonal) mot en linje l_2 skrivs detta $l_1 \perp l_2$.

Sats: Låt $l_1: y = k_1x + m_1$ och $l_2: y = k_2x + m_2$ vara två linjer. Då gäller att $l_1 \parallel l_2$ precis då $k_1 = k_2$.

Bevis: Om linjerna är parallella har de samma lutningsvinkel, och alltså samma riktningskoefficient. Omvänt gäller att om de har samma riktningskoefficient så har de samma lutningsvinkel, och är alltså parallella.

Exempel: Bestäm ekvationen för den linje som går genom punkten $(3, -1)$ och som är parallell med linjen $y = 2x - 10$.

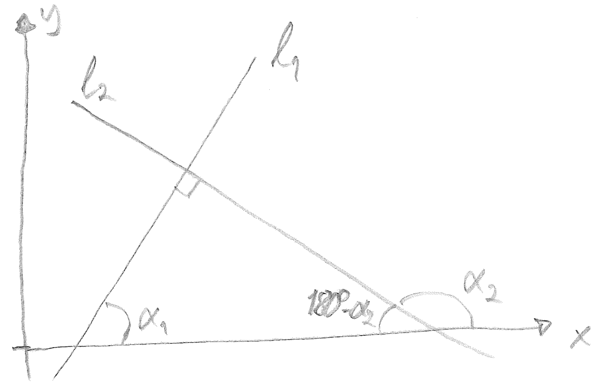
Vi ansätter att den sökta linjen är $y=kx+m$. Eftersom de båda linjerna är parallella måste $k=2$. Genom att stoppa in punkten $(3,-1)$ i ekvationen $y=2x+m$ kan vi nu bestämma m: $-1=2\cdot 3+m \Leftrightarrow m=-7$.

Ekvationen för den sökta linjen är $y=2x-7$.

Sats: Låt $l_1: y=k_1x+m_1$ och $l_2: y=k_2x+m_2$ vara två linjer.

Då gäller att $l_1 \perp l_2$ precis då $k_2=-\frac{1}{k_1}$.

Bevis: Den ena linjen kommer att ha en spetsig lutningsvinkel medan den andra kommer att ha en trubbig.



Om α_1 är den spetsiga vinkeln så vet vi sedan tidigare att $k_1=\tan\alpha_1$ och $k_2=-\tan(180°-\alpha_2)$.

Detta ger nu, eftersom α_1 är komplementvinkel till $180°-\alpha_2$, att

$$k_2=-\tan(180°-\alpha_2)=-\cot\alpha_1=-\frac{1}{\tan\alpha_1}=-\frac{1}{k_1}.$$

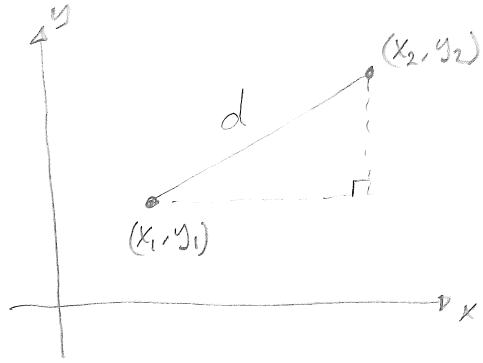
Exempel: Vilken linje genom origo är vinkelrät mot $y=\frac{2}{3}x+2$?

Vi ansätter $y=kx+m$, och får enligt satsen ovan att $k=-\frac{3}{2}$.

Insättning av origo, dvs $(0,0)$, ger nu $0=-\frac{3}{2}\cdot 0+m \Rightarrow m=0$.

Linjens ekvation är alltså $y=-\frac{3}{2}x$.

Kortaste avståndet mellan två punkter är ofta av intresse i olika tillämpningar, och är lika med längden av det linjestycke som förbinder punkterna.



Genom att dra de streckade linjerna enligt figuren (parallella med koordinataxlarna) uppstår en rätvinklig triangel med två av hörnen i punkterna (x_1, y_1) och (x_2, y_2). Pythagoras sats ger nu

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=d^2 \Rightarrow d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

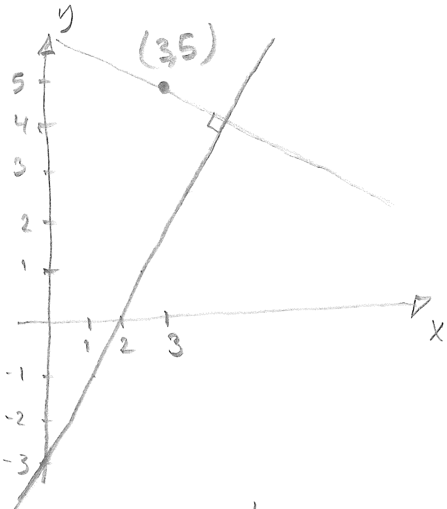
Formeln $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ kallas <u>avståndsformeln</u>.

Avståndsformeln fungerar oavsett hur punkterna förhåller sig till varandra, dvs det spelar ingen roll vilken som är överst eller till höger, eftersom $(x_2-x_1)^2=(x_1-x_2)^2$ och $(y_2-y_1)^2=(y_1-y_2)^2$.

Exempel: Avståndet från (4,3) till origo är

$$d=\sqrt{(0-4)^2+(0-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5.$$

Exempel: Bestäm (kortaste) avståndet mellan linjen $y=2x-3$ och punkten $(3,5)$.



Det kortaste avståndet får vi genom att gå vinkelrätt mot linjen från $(3,5)$ tills vi träffar linjen.

Detta kan vi göra genom att bestämma linjen genom $(3,5)$ som är vinkelrät mot $y=2x-3$, bestämma linjernas skärningspunkt, och sedan använda avståndsformeln.

En linje som är vinkelrät mot $y=2x-3$ har riktningskoefficient $k=-\frac{1}{2}$. Detta tillsammans med punkten $(3,5)$ i enpunktsformeln ger oss $y-5=-\frac{1}{2}(x-3)$.

Linjernas skärningspunkt bestäms av det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} y=2x-3 \\ y-5=-\frac{1}{2}(x-3) \end{cases}$$

som vi kan lösa exempelvis med substitutionsmetoden:

$$\begin{cases} y=2x-3 \\ y-5=-\frac{1}{2}(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-3 \\ 2x-3-5=-\frac{1}{2}(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-3 \\ 4x-16=-x+3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=2x-3 \\ 5x=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{23}{5} \\ x=\frac{19}{5}. \end{cases}$$

Avståndsformeln ger nu avståndet d från $(3,5)$ till skärningspunkten $\left(\frac{19}{5}, \frac{23}{5}\right)$ som

$$d = \sqrt{\left(\frac{19}{5}-3\right)^2 + \left(\frac{23}{5}-5\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{19-15}{5}\right)^2 + \left(\frac{23-25}{5}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}+\frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Avståndet från $(3,5)$ till linjen $y = 2x-3$ är alltså $d = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (kan även skrivas $d = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ för att undvika rot i nämnaren).