Absolutbelopp

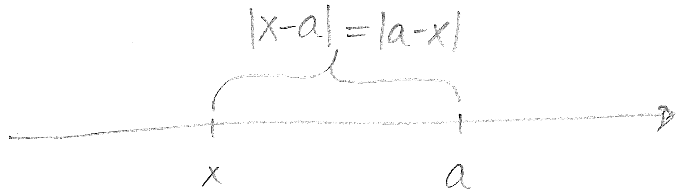
Absolutbeloppet av x betecknas $|x|$ och definieras enligt

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0 \\ -x & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

Anmärkning: Observera att det alltid gäller att $|x| \geq 0$, och även att $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Geometriskt kan $|x|$ tolkas som avståndet från x till noll.

På samma sätt betyder $|x-a|$ avståndet från x till a:



Absolutbelopp kan användas för att beskriva intervall som är symmetriska kring en viss punkt.

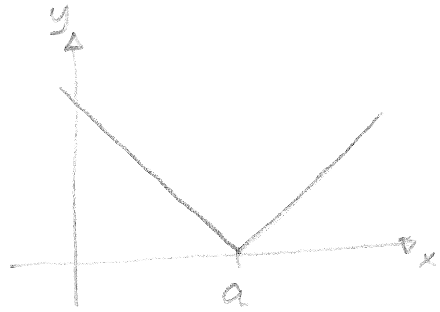
Exempel: Olikheten $|x-3| < 2$ blir enligt definitionen av absolutbelopp två olikheter:

$$|x-3| < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 < 2 & \text{om } x-3 \geq 0 \\ -(x-3) < 2 & \text{om } x-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x < 5 & \text{om } x \geq 3 \\ x-3 > -2 & \text{om } x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 & \text{om } x \geq 3 \\ x > -1 & \text{om } x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 5.$$

Alltså är $|x-3| < 2 \Leftrightarrow x \in (-1, 5)$.

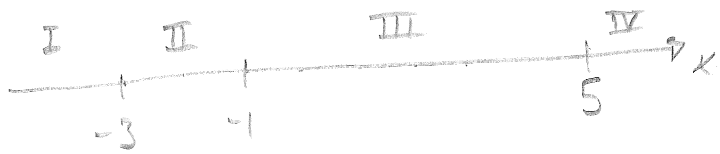
I absolutbeloppet $|x-a|$ kallas a för brytpunkt, på grund av att grafen ser ut som i figuren:



Eftersom $|x| = |x-0|$ har $|x|$ sin brytpunkt i nollan.

Exempel: Lös ekvationen $|x+1| + |x-5| + |x+3| = 10$

Vi börjar med att hitta alla vänsterledets brytpunkter, som är $x=-1$, $x=5$, och $x=-3$. Vänsterledet förenklas till olika uttryck beroende på vilket av de fyra intervallen vi befinner oss i:



I) Om $x<-3$ blir ekvationen

$$-1-x+5-x-3-x=10 \Leftrightarrow 1-3x=10 \Leftrightarrow -3x=9 \Leftrightarrow x=-3,$$

men detta är en <u>falsk lösning</u> eftersom inte $-3<-3$.

II) Om $-3 \le x < -1$ blir ekvationen

$$-1-x+5-x+x+3=10 \Leftrightarrow 7-x=10 \Leftrightarrow x=3.$$

Detta är en giltig lösning, då $-3 \le -3 < -1$.

III) Om $-1 \le x < 5$ får vi

$$x+1+5-x+x+3=10 \Leftrightarrow x+9=10 \Leftrightarrow x=1.$$

Detta är en giltig lösning eftersom $-1 \le 1 < 5$.

IV) Om $5 \le x$ får vi

$$x+1+x-5+x+3=10 \Leftrightarrow 3x-1=10 \Leftrightarrow 3x=11 \Leftrightarrow x=\frac{11}{3}.$$

Detta är en falsk lösning eftersom inte $5 \le \frac{11}{3}$.

Sammantaget finns alltså de två lösningarna $x=1$ och $x=3$.

För absolutbeloppet gäller följande räkneregler:

(i) $|x|=|-x|$

(ii) $|xy|=|x|\cdot|y|$

(iii) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$

Regel (i) kommer sig av definitionen av absolutbeloppet.

Regel (ii) får vi genom att tänka igenom de fyra varianterna med tecknen för x och y (eller metoden i boken).

Regel (iii) följer av regel (ii), enligt $|x|=\left|\frac{x}{y}\cdot y\right|=\left|\frac{x}{y}\right|\cdot|y| \Leftrightarrow \left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$.

Exempel: Förenkla $\frac{|a^4-ab^3|}{|a^2-b^2|}$ om $a<0<b$.

Vi faktoriserar, och får

$$\frac{|a^4-ab^3|}{|a^2-b^2|}=\frac{|a(a^3-b^3)|}{|(a-b)(a+b)|}=\frac{|a(a-b)(a^2+ab+b^2)|}{|a-b|\cdot|a+b|}=$$

$$=\frac{|a|\cdot\cancel{|a-b|}\cdot|a^2+ab+b^2|}{\cancel{|a-b|}\cdot|a+b|}=-\frac{a\cdot(a^2+ab+b^2)}{|a+b|},$$

eftersom $|a|=-a$ och $a^2+ab+b^2\ge 0$.

(Tveksamt om det blev så mycket enklare.)

Ett vanligt fel är att tro att $\sqrt{a^2}=a$, men det gäller bara så länge $a \geq 0$. Enligt definitionen av kvadratrot är ju $\sqrt{a^2}$ det tal $x \geq 0$ som uppfyller $x^2=a^2$, och om $a<0$ så är $\sqrt{a^2}=-a$. Kombinerar vi fallen $a \geq 0$ och $a<0$ i en formel får vi $\sqrt{a^2}=|a|$.

Exempel: Förenkla $\dfrac{\sqrt{a^3b-ba^2}}{\sqrt{a^4b^2 \cdot c^2}}$ om $b>0$.

Vi får

$$\frac{\sqrt{a^3b-ba^2}}{\sqrt{a^4b^2c^2}}=\frac{\sqrt{a^2b(a-1)}}{\sqrt{a^4}\sqrt{b^2}\sqrt{c^2}}=\frac{\sqrt{a^2}\sqrt{b}\sqrt{a-1}}{a^2\sqrt{b^2}\sqrt{c^2}}=$$

$$\frac{|a|\sqrt{b}\sqrt{a-1}}{a^2b\cdot|c|}=\frac{a\sqrt{b}\sqrt{a-1}}{a^2b|c|}=\frac{\sqrt{a-1}}{a\sqrt{b}|c|},$$

eftersom $\sqrt{a-1}$ gör att $a \geq 1$ så att $|a|=a$.

För absolutbelopp har vi följande sats, som är användbar ibland för att göra uppskattningar:

Sats (Triangelolikheten): Om $x,y \in \mathbb{R}$ så gäller

$$|x+y| \leq |x|+|y|.$$

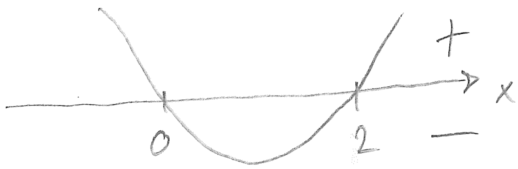
Bevis: $(|x|+|y|)^2=|x|^2+2|x|\cdot|y|+|y|^2=x^2+2|xy|+y^2 \geq x^2+2xy+y^2=$

$=(x+y)^2=|x+y|^2$, dvs $(|x|+|y|)^2 \geq |x+y|^2 \Rightarrow |x|+|y| \geq |x+y|$.

Exempel: Lös olikheten $|x^2-2x|+x-2<0$.

Först undersöker vi när $x^2-2x \geq 0$ respektive $x^2-2x<0$, eftersom vänsterledet blir olika uttryck i dessa fall.

Eftersom $x^2-2x = x(x-2)$ har teckentabellen



ser vi att $x^2-2x \geq 0$ då $x \leq 0$ eller $x \geq 2$,

och att $x^2-2x<0$ då $0<x<2$.

Om $x^2-2x \geq 0$ blir olikheten

$$x^2-2x+x-2<0 \Leftrightarrow x^2-x-2<0.$$

Vi hittar nollställena till x^2-x-2:

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}.$$

Alltså är $x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$. Teckentabellen blir

vilket ger $-1<x<2$. Men samtidigt skall $x^2-2x \geq 0$, som enligt ovan sker då $x \leq 0$ eller $x \geq 2$.

Kvar blir alltså bara $-1<x \leq 0$.

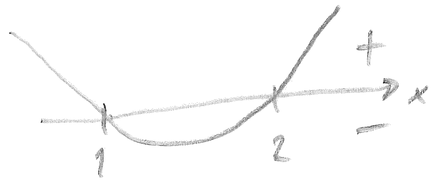
Om $x^2-2x<0$ blir olikheten istället

$$-x^2+2x+x-2<0 \Leftrightarrow x^2-3x+2>0.$$

Vi hittar nollställena till x^2-3x+2:

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{8}{4}}=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}.$$

Detta ger $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, som har teckentabellen



Olikheten $x^2-3x+2>0$ gäller alltså då $x<1$ eller $x>2$.

Samtidigt skall $x^2-2x<0$ gälla, vilket sker då $0<x<2$,

så kvar blir bara $0<x<1$.

Sammantaget gäller $|x^2-2x|+x-2<0$ då $-1<x\leq 0$ eller

då $0<x<1$. Detta kan förenklas till $-1<x<1$, eller till

intervallet $(-1,1)$. (Eller till $|x|<1$.)