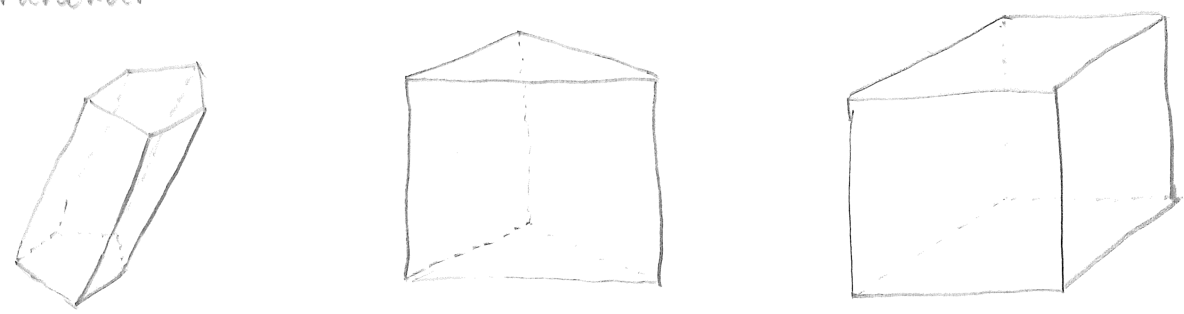
MVE425 Matematik, del A, hösten 2018, Föreläsning 19 (1.)
Mårten Wadenbäck

Klot och polyedrar

Tredimensionella kroppar som begränsas av plana ytor kallas polyedrar. Vi skall särskilt titta på två typer av polyedrar, nämligen prismor och pyramider.

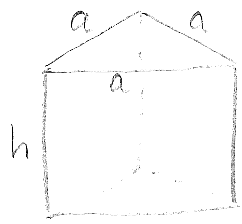
Ett prisma är en polyeder som begränsas av två parallella ytor samt tre eller fler sidoytor, där sidoytornas kanter är parallella:



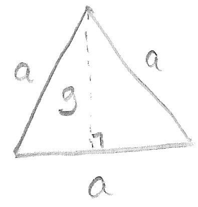
Ett prisma med basarean B och höjden h har volymen $V = B \cdot h$.

Anmärkning: Volymen beror inte på sidoytornas lutning.

Exempel: Bestäm volymen och arean av ett prisma vars basyta utgörs av en liksidig triangel med sidan a, och vars sidor är vinkelräta mot basytan och har höjden h.



Vi börjar med att beräkna basytans area B.



Låt g vara höjden i triangeln. Då ger Pythagoras sats att $\left(\frac{a}{2}\right)^2+g^2=a^2 \Leftrightarrow g^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$, så att $g=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (eftersom g är en sträcka).

Basytans area blir nu $B=\frac{a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, och prismats volym V blir $V=B\cdot h=\frac{a^2h\sqrt{3}}{4}$.

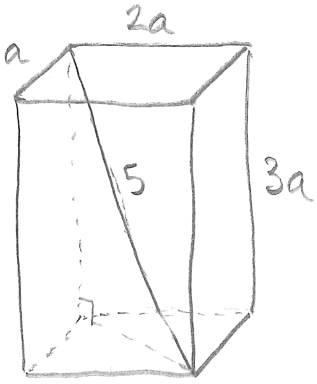
Prismats are får vi genom att summera topp- och bottenytornas areor med de tre sidoytornas areor. Detta ger

$$A=2B+3ah=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}+3ah.$$

Ett prisma vars bottenyta är en triangel kallas tresidigt, om bottenytan är en fyrhörning kallas prismat fyrsidigt, osv.

Ett fyrsidigt prisma vars motstående sidoytor är parallella kallas för en *parallellepiped*, och alla dess begränsningsytor blir parallellogram. Om alla begränsningsytorna till en parallellepiped är rektanglar får vi ett *rätblock*, och om rätblockets sidor är kvadrater får vi en *kub*.

Exempel: I ett rätblock är höjden tre gånger så lång som djupet, och bredden dubbelt så lång som djupet. Den längsta diagonalen i rätblocket har längden 5. Bestäm rätblockets volym. (Vi inför a enligt figuren)



Om vi drar en diagonal i botten utgör den ena kateten i en rätvinklig triangel vars andra katet blir 3a och vars hypotenusa är 5, så att Pythagoras sats ger

$$d^2+(3a)^2=5^2,$$

där d är längden av bottendiagonalen. Samtidigt kan vi använda Pythagoras sats för triangeln i botten, vilket ger

$$a^2+(2a)^2=d^2.$$

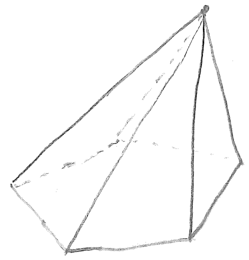
Insatt i $d^2+(3a)^2=5^2$ ger detta $a^2+(2a)^2+(3a)^2=5^2 \Leftrightarrow$

$$a^2+4a^2+9a^2=25 \Leftrightarrow 14a^2=25 \Leftrightarrow a^2=\frac{25}{14} \Leftrightarrow a=\frac{5}{\sqrt{7}}.$$

Rätblockets volym blir nu

$$V=a\cdot 2a\cdot 3a=6a^3=6\left(\frac{5}{\sqrt{7}}\right)^3=6\cdot\frac{125}{7\sqrt{7}}=\frac{750}{7\sqrt{7}}.$$

En pyramid är en polyeder som begränsas av en (plan) bottenyta och minst tre sidoytor som alla möts i en gemensam punkt (spets).

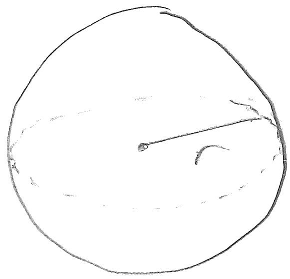


Pyramidens höjd definieras som avståndet från spetsen till bottenplanet (spetsen måste inte ligga rakt ovanför bottenytan).

Pyramidens volym ges av $V = \frac{Bh}{3}$, där B är bottenytans area. Pyramidens volym är alltså en tredjedel av motsvarande prismas volym (samma höjd och basarea).

Ett klot består av alla punkter som befinner sig på eller inom avståndet r (radien) från en given medelpunkt.

Volymen av ett klot är $V = \frac{4\pi r^3}{3}$, och dess area ges av $A = 4\pi r^2$.



Anmärkning: Ett klot är inte en polyeder, eftersom det inte begränsas av plana ytor.

Exempel: Ett klot har arean 20π. Bestäm dess volym.

Vi vet att $A = 4\pi r^2$, så

$$20\pi = 4\pi r^2 \Leftrightarrow r^2 = 5 \Leftrightarrow r = \sqrt{5} \text{ (eftersom } r > 0).$$

Insatt i formeln för volymen ger detta

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi \cdot (\sqrt{5})^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 5\sqrt{5}}{3} = \frac{20\pi\sqrt{5}}{3}.$$

Volymen blir alltså $V = \frac{20\pi\sqrt{5}}{3}$.