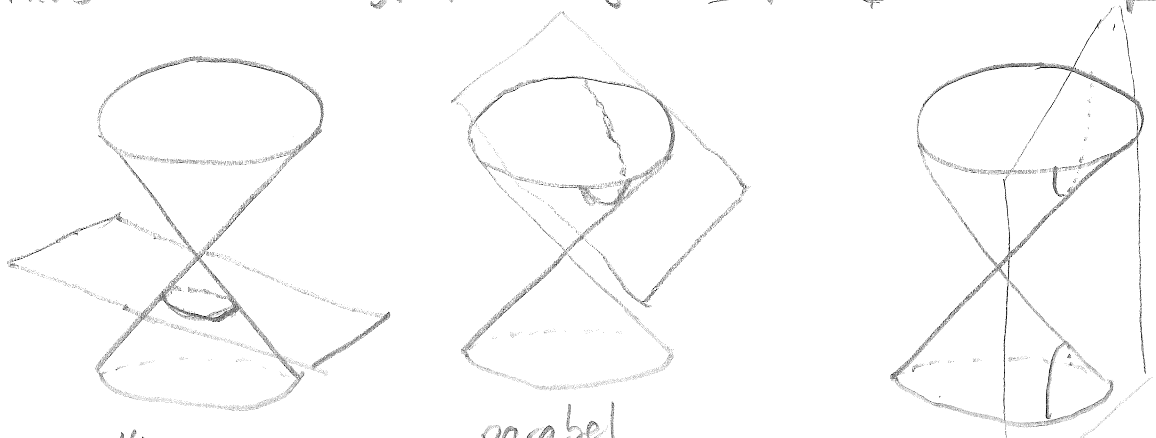
Mårten Wadenbäck

Kägelsnitt (cirklar och parabler)

Kägelsnitt är de kurvor som uppstår som skärningen mellan en kägla (en rak, cirkulär dubbelkon) och ett plan.

Det finns tre huvudtyper, nämligen ellipser, parabler, och hyperbler:



ellips   parabel   hyperbel

Vilken typ av kägelsnitt beror på hur planet lutar i förhållande till käglans "sida":

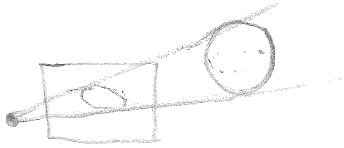
- är planets lutning mindre bildas en ellips
- är lutningarna lika bildas en parabel
- är planets lutning större bildas en hyperbel.

Om planet är vinkelrätt mot käglans axel får vi en cirkel, som alltså är ett specialfall av en ellips.

Om planet går genom käglans spets blir ellipsen en punkt, parabeln blir en linje, och hyperbeln blir två linjer.

Alla kägelsnitt ges av ekvationer på formen $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

Exempel: Om vi tar en bild av ett klot kommer bilden att bli en ellips, enligt konstruktionen i figuren.

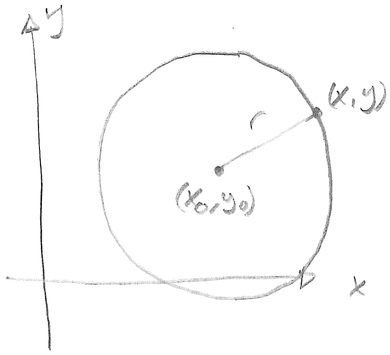


Vi erinrar oss följande från den plana geometrin:

Definition: En <u>cirkel</u> är mängden av alla punkter i ett plan som har ett givet avstånd r (radien) till en fix medelpunkt.

Härledning av cirkelns ekvation:

Betrakta en cirkel med radie r och med medelpunkten (x_0, y_0).



En godtycklig punkt (x,y) på cirkeln ligger på avståndet r från (x_0,y_0). Med hjälp av avståndsformeln kan detta skrivas

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

Genom att kvadrera båda sidor får vi cirkelns ekvation:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2.$$

Anmärkning: Utveckling ger

$$x^2 - 2x x_0 + x_0^2 + y^2 - 2y y_0 + y_0^2 - r^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x^2 + y^2 - 2x_0 x - 2y_0 y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0,$$

som är på formen $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$.

Exempel: Bestäm radie och medelpunkt för cirkeln

$$x^2+y^2-3x-6y+5=0.$$

Kvadratkomplettering ger

$$x^2+y^2-3x-6y+5=0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2-2\cdot\tfrac{3}{2}x+\left(\tfrac{3}{2}\right)^2}_{(x-\frac{3}{2})^2}-\left(\tfrac{3}{2}\right)^2+\underbrace{y^2-2\cdot 3y+3^2}_{(y-3)^2}-3^2+5=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2+(y-3)^2-\tfrac{9}{4}-9+5=0 \Leftrightarrow \left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2+(y-3)^2-\tfrac{25}{4}=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2+(y-3)^2=\left(\tfrac{5}{2}\right)^2.$$

Vi kan här läsa av medelpunkten $(\frac{3}{2},3)$ samt radien $r=\frac{5}{2}$.

Exempel: Bestäm för varje värde på c antalet skärningspunkter mellan cirkeln $(x-1)^2+y^2=4$ och räta linjen $y=2x+c$.

I skärningspunkter (gemensamma punkter) skall båda kurvornas ekvationer vara uppfyllda, dvs ekvationssystemet $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=4\\ y=2x+c\end{cases}$ skall vara uppfyllt.

Insättning av linjens ekvation i cirkelns ekvation ger

$$(x-1)^2+(2x+c)^2=4 \Leftrightarrow x^2-2x+1+4x^2+4cx+c^2=4 \Leftrightarrow$$

$$5x^2+(4c-2)x+c^2-3=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{4c-2}{5}x+\frac{c^2-3}{5}=0.$$

Om ekvationen har lösning(ar) ger pq-formeln

$$x=-\frac{2c-1}{5}\pm\sqrt{\left(\frac{2c-1}{5}\right)^2-\frac{c^2-3}{5}}.$$

Antalet lösningar beror på uttrycket under rottecknet. Vi skall alltså ta reda på för vilka c som uttrycket är större än, mindre än, respektive lika med noll. Detta tar vi reda på genom att göra en teckentabell för $\left(\frac{2c-1}{5}\right)^2-\frac{c^2-3}{5}$. Förenkling ger

$$\left(\frac{2c-1}{5}\right)^2-\frac{c^2-3}{5}=\frac{4c^2-4c+1}{25}-\frac{5c^2-15}{25}=$$

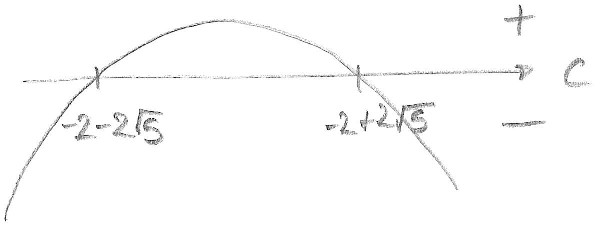
$$=\frac{-c^2-4c+16}{25}.$$

Faktorisering via nollställena, som ges av

$$c^2+4c-16=0 \Leftrightarrow c=-2\pm\sqrt{2^2+16}=-2\pm2\sqrt{5},$$

visar att $\frac{-c^2-4c+16}{25}=-\frac{(c+2+2\sqrt{5})(c+2-2\sqrt{5})}{25}.$

Teckentabellen blir nu

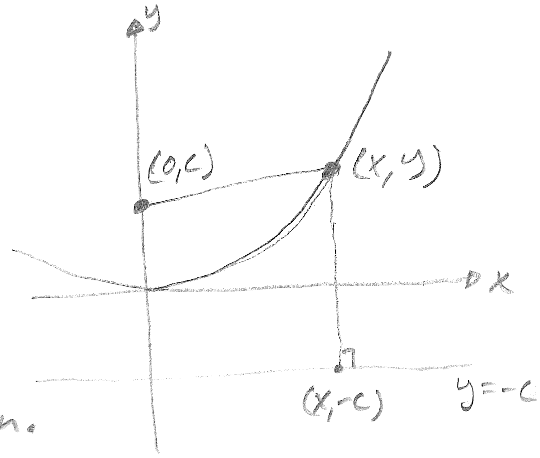


Detta betyder att:

- det finns två skärningspunkter då $-2-2\sqrt{5}<x<-2+2\sqrt{5}$,
- det finns precis en skärningspunkt då $x=-2\pm2\sqrt{5}$,
- det saknas skärningspunkter då $x<-2-2\sqrt{5}$ eller $x>-2+2\sqrt{5}$.

Definition: En *parabel* är mängden av alla punkter som har lika stort avstånd till en fix punkt (brännpunkten) som till en given linje (styrlinjen) som inte går genom brännpunkten.

Härledning av parabelns ekvation:



Låt brännpunktens koordinater vara $(0,c)$, och låt styrlinjen vara $y=-c$. Låt (x,y) vara en godtycklig punkt på parabeln.

Då säger avståndsformeln och parabelns definition att

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y+c)^2} \iff$$

$$x^2+(y-c)^2=(y+c)^2 \iff$$

$$x^2+y^2-2cy+c^2=y^2+2cy+c^2 \iff$$

$$x^2=4cy \iff y=\frac{1}{4c}x^2=kx^2$$

för någon konstant $k\neq 0$. Parabelns ekvation är alltså $y=kx^2$.