Alternativ metod för att lösa andragradsekvation med komplexa koefficienter

Uppgift: Lös ekvationen $z^2 + 4z + 1 + i = 0$

Lösning:

Steg 1: Kvadratkomplettera $z^2 + 4z + 1 + i = (z + 2)^2 - 3 + i$

Den givna ekvationen är alltså ekvivalent med ekvationen $(z + 2)^2 = 3 - i$

Alternativ metod för att lösa andragradsekvation med komplexa koefficienter

Uppgift: Lös ekvationen $z^2 + 4z + 1 + i = 0$

Lösning:

Steg 1: Kvadratkomplettera $z^2 + 4z + 1 + i = (z + 2)^2 - 3 + i$

Den givna ekvationen är alltså ekvivalent med ekvationen $(z + 2)^2 = 3 - i$

Steg 2: Hitta ett komplext tal $w = u + iv$ sådant att $w^2 = 3 - i$

När w ersätts med $u + iv$ så får man att $u^2 - v^2 + i\,2uv = 3 - i$

Nu ska det komma något som inte finns i kursboken

Alternativ metod för att lösa andragradsekvation med komplexa koefficienter

Uppgift: Lös ekvationen $z^2 + 4z + 1 + i = 0$

Lösning:

Steg 1: Kvadratkomplettera $z^2 + 4z + 1 + i = (z + 2)^2 - 3 + i$

Den givna ekvationen är alltså ekvivalent med ekvationen $(z + 2)^2 = 3 - i$

Steg 2: Hitta ett komplext tal $w = u + iv$ sådant att $w^2 = 3 - i$

När w ersätts med $u + iv$ så får man att $u^2 - v^2 + i\,2uv = 3 - i$

När man tar beloppet av båda leden i ekvationen $w^2 = 3 - i$, så får man

$$|w^2| = |3 - i| \iff |w|^2 = \text{sqrt}(3^2 + (-1)^2) \iff u^2 + v^2 = \text{sqrt}(10)$$

Alternativ metod för att lösa andragradsekvation med komplexa koefficienter

Uppgift: Lös ekvationen $z^2 + 4z + 1 + i = 0$

Lösning:

Steg 1: Kvadratkomplettera $z^2 + 4z + 1 + i = (z + 2)^2 - 3 + i$

Den givna ekvationen är alltså ekvivalent med ekvationen $(z + 2)^2 = 3 - i$

Steg 2: Hitta ett komplext tal $w = u + iv$ sådant att $w^2 = 3 - i$

När w ersätts med $u + iv$ så får man att $u^2 - v^2 + i\,2uv = 3 - i$

När man tar beloppet av båda leden i ekvationen $w^2 = 3 - i$, så får man

$$|w^2| = |\,3 - i\,| \Leftrightarrow |w|^2 = \text{sqrt}(3^2 + (-1)^2) \Leftrightarrow u^2 + v^2 = \text{sqrt}(10)$$

Det kvarstår att beräkna u och v som uppfyller ekvationsystemet:

$$\text{(I) } u^2 - v^2 = 3 \qquad \text{(II) } 2uv = -1 \qquad \text{(III) } u^2 + v^2 = \text{sqrt}(10)$$

Alternativ metod för att lösa andragradsekvation med komplexa koefficienter

Uppgift: Lös ekvationen $z^2 + 4z + 1 + i = 0$

Lösning:

Steg 1: Kvadratkomplettera $z^2 + 4z + 1 + i = (z + 2)^2 - 3 + i$

Den givna ekvationen är alltså ekvivalent med ekvationen $(z + 2)^2 = 3 - i$

Steg 2: Hitta ett komplext tal $w = u + iv$ sådant att $w^2 = 3 - i$

När w ersätts med $u + iv$ så får man att $u^2 - v^2 + i\,2uv = 3 - i$

När man tar beloppet av båda leden i ekvationen $w^2 = 3 - i$, så får man

$$|w^2| = |\,3 - i\,| \quad \Leftrightarrow \quad |w|^2 = \text{sqrt}(3^2 + (-1)^2) \quad \Leftrightarrow \quad u^2 + v^2 = \text{sqrt}(10)$$

Det kvarstår att beräkna u och v som uppfyller ekvationsystemet:

(I) $u^2 - v^2 = 3$ (II) $2uv = -1$ (III) $u^2 + v^2 = \text{sqrt}(10)$

(I) + (III) ger $2u^2 = 3 + \sqrt{10}$, alltså $u = \pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{10}}{2}}$ (man slänger bort en av dem)

Alternativ metod för att lösa andragradsekvation med komplexa koefficienter

Uppgift: Lös ekvationen $z^2 + 4z + 1 + i = 0$

Lösning:

Steg 1: Kvadratkomplettera $z^2 + 4z + 1 + i = (z + 2)^2 - 3 + i$

Den givna ekvationen är alltså ekvivalent med ekvationen $(z + 2)^2 = 3 - i$

Steg 2: Hitta ett komplext tal $w = u + iv$ sådant att $w^2 = 3 - i$

När w ersätts med $u + iv$ så får man att $u^2 - v^2 + i\,2uv = 3 - i$

När man tar beloppet av båda leden i ekvationen $w^2 = 3 - i$, så får man

$|w^2| = |3 - i| \;\Leftrightarrow\; |w|^2 = \text{sqrt}(3^2 + (-1)^2) \;\Leftrightarrow\; u^2 + v^2 = \text{sqrt}(10)$

Det kvarstår att beräkna u och v som uppfyller ekvationsystemet:

(I) $u^2 - v^2 = 3$ (II) $2uv = -1$ (III) $u^2 + v^2 = \text{sqrt}(10)$

(I) + (III) ger $2u^2 = 3 + \sqrt{10}$, alltså $u = \pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{10}}{2}}$ (man slänger bort en av dem)

(II) ger $v = \frac{-1}{2u}$, alltså $v = \frac{-1}{\sqrt{6+2\sqrt{10}}}$ (det var det negativa u:et som kastats)

Alternativ metod för att lösa andragradsekvation med komplexa koefficienter

Uppgift: Lös ekvationen $z^2 + 4z + 1 + i = 0$

Lösning:

Steg 1: Kvadratkomplettera $z^2 + 4z + 1 + i = (z + 2)^2 - 3 + i$

Den givna ekvationen är alltså ekvivalent med ekvationen $(z + 2)^2 = 3 - i$

Steg 2: Hitta ett komplext tal $w = u + iv$ sådant att $w^2 = 3 - i$

När w ersätts med $u + iv$ så får man att $u^2 - v^2 + i\,2uv = 3 - i$

När man tar beloppet av båda leden i ekvationen $w^2 = 3 - i$, så får man

$$|w^2| = |\,3 - i\,| \;\Leftrightarrow\; |w|^2 = \text{sqrt}(3^2 + (-1)^2) \;\Leftrightarrow\; u^2 + v^2 = \text{sqrt}(10)$$

Det kvarstår att beräkna u och v som uppfyller ekvationsystemet:

(I) $u^2 - v^2 = 3$ (II) $2uv = -1$ (III) $u^2 + v^2 = \text{sqrt}(10)$

(I) + (III) ger $2u^2 = 3 + \sqrt{10}$, alltså $u = \pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{10}}{2}}$ (man slänger bort en av dem)

(II) ger $v = \frac{-1}{2u}$, alltså $v = \frac{-1}{\sqrt{6+2\sqrt{10}}}$ (det var det negativa u:et som kastats)

Steg 3: Den givna ekvationen är ekvivalent med $(z + 2)^2 = w^2$, som löses av $z_{1,2} = -2 \pm w$,

där $w = u + iv = \sqrt{\frac{3+\sqrt{10}}{2}} - \frac{i}{\sqrt{6+2\sqrt{10}}}$