ÖVNINGSUPPGIFTER TILL KAPITEL 4

4.1. Antag att $z_1 = -4 + i3$ och $z_2 = 1 - i$. Beräkna

a) $z_1 + z_2$ **b)** $z_1 - z_2$ **c)** $z_1 \cdot z_2$ **d)** $\dfrac{z_1}{z_2}$ **e)** $z_1 \cdot \overline{z}_1$ **f)** $\operatorname{Re} z_1$

g) $\operatorname{Im} z_1$ **h)** $\operatorname{Im} z_2$ **i)** $i^4 z_2$ **j)** $(z_2)^3$ **k)** $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}\right)$

4.2. Beräkna

a) $(2-i)(1+i4)(-1+i2)$ **b)** $\dfrac{(2-i)(1+i4)}{-1+i2}$ **c)** $(1+i)^3$ **d)** $(1+i)^4$

4.3. Beräkna

a) $\operatorname{Im}\dfrac{1}{x+iy}$ **b)** $\operatorname{Re}\dfrac{x-iy}{x+iy}$ **c)** $\operatorname{Im}\dfrac{x-iy}{x+iy}$

4.4. Visa att **a)** $\dfrac{z+\overline{z}}{2} = \operatorname{Re} z$ **b)** $\dfrac{z-\overline{z}}{i2} = \operatorname{Im} z$

4.5. Låt $z = \dfrac{4-ir}{r-i}$ där r är ett reellt tal.

a) Bestäm r så att z blir reellt och ange värdet på z för detta r-värde.

b) Bestäm r så att $\operatorname{Im} z = 3$ och ange värdet på z för detta r-värde.

4.6. Lös ekvationerna **a)** $5 + i - z = 1 - i2\overline{z}$ **b)** $z + 2 - i = (3 - i4)\overline{z}$

(Sätt $z = x + iy$.)

4.7. Lös ekvationerna

a) $z^2 + 1 = 0$ **b)** $z^2 + 2z + 2 = 0$ **c)** $z^2 + i = 0$

d) $z^2 + 4z + 1 + i4 = 0$ **e)** $iz^2 + (1+i)z - 7 + i4 = 0$

4.8. Bestäm de komplexa talen w_1 och w_2 så att ekvationen

$z^2 + w_1 z + w_2 = 0$ får rötterna $1 + i2$ och $2 - i3$.

4.9. Lös ekvationen $z^3 - z^2 + 3z + 5 = 0$.

4.10. Ekvationen $z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 8z - 4 = 0$ har en rent imaginär rot, dvs en rot av typen $z = ib$. Lös ekvationen.

4.11. Ekvationen $z^4 - 6z^3 + 18z^2 - 30z + 25 = 0$ har en rot med realdelen 1.

a) Lös ekvationen. **b)** Uppdela $z^4 - 6z^3 + 18z^2 - 30z + 25$ i faktorer.

c) Uppdela $z^4 - 6z^3 + 18z^2 - 30z + 25$ i **reella** faktorer.

4.12. Ekvationen $z^4 + az^3 + 35z^2 - 46z + b = 0$ har roten $3 + i$.
Bestäm de reella konstanterna a och b och lös ekvationen.

4.13. Ekvationen $z^4 - 4z^3 - z^2 + 24z - 30 = 0$ har en rot med imaginärdelen 1. Lös ekvationen.

4.14. Bestäm konstanten k så att ekvationen $z^3 + 3z^2 - z + k = 0$ får roten 1 och lös sedan ekvationen för detta värde på k.

4.15. Lös ekvationen $1 + \sqrt{3 + 2x - 2x^3} = x$.

4.16. Lös ekvationen $\dfrac{z^2 + 1}{z + 1} = \dfrac{z^2 + 4z - 2}{z^2 + 2}$.

4.17. Polynomet $2z^5 + 5z^4 + 14z^3 + 10z^2 + 12z + 5$ har det komplexa nollstället $-1 + i2$.

a) Ange de komplexa rötterna till ekvationen

$2z^5 + 5z^4 + 14z^3 + 10z^2 + 12z + 5 = 0$.

b) Uppdela polynomet i **reella** faktorer.

4.18. Låt $z_1 = 3 - i2$ och $z_2 = -2 + i$ vara givna. Beräkna

a) $|z_2|$ **b)** $|z_1|^2$ **c)** $|z_1 \cdot z_2|$ **d)** $|z_1| \cdot |z_2|$ **e)** $\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right|$ **f)** $\dfrac{|z_2|}{|z_1|}$

4.19. Visa att $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{4} \Rightarrow |z-2| = 2$

4.20. Skriv följande komplexa tal på polär form

a) $i2$ **b)** -3 **c)** $-i4$ **d)** $1+i$ **e)** $-1+i$ **f)** $-1-i$

g) $-1+i\sqrt{3}$ **h)** $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ **i)** $2+i3$

4.21. Lös ekvationen $e^{i\frac{\pi}{4}} z = e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{3\pi}{4}} z.$

4.22. Förenkla uttrycket $\left(e^{i\frac{7\pi}{20}}\right)^{100} \left(e^{i\frac{11\pi}{30}}\right)^{-60}$

4.23. Skriv på formen $x + iy$

a) $e^{i\pi}$ **b)** $2e^{-i\frac{\pi}{4}}$ **c)** $\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$ **d)** $4e^{-i\frac{25\pi}{6}}$

4.24. Beräkna

a) $\dfrac{(1+i)^6 (1-i\sqrt{3})^8}{(i-\sqrt{3})^{10}}$ **b)** $\dfrac{(-3+i\sqrt{27})^{87}}{(3+i3)^{86}(i2)^{42}}$

4.25. Uttryck med hjälp av Moivres formel

a) $\cos 4\theta$ som ett polynom i $\cos\theta$ **b)** $\tan 4\theta$ i $\tan\theta$.

4.26. Visa, med hjälp av Eulers formler, att

a) $\cos^2 v = \dfrac{\cos 2v}{2} + \dfrac{1}{2}$ **b)** $\sin^5 v = \dfrac{\sin 5v}{16} - \dfrac{5\sin 3v}{16} + \dfrac{5\sin v}{8}$

4.27. Lös följande ekvationer

a) $3z^2 + i12 = 0$ **b)** $z^6 = -\sqrt{3} + i3$ **c)** $z^4 = -8 + i8\sqrt{3}$

(I **4.27a** och **4.27c** skall svaren ges på formen $x + iy$.)

4.28. Lös ekvationen $z^3 - 1 = 0$, dels genom att gå över till polär form och dels genom att utnyttja att ekvationen har en heltalsrot.

4.29. Lös ekvationen $z^6 + (8 - i)z^3 - i8 = 0$ (Sätt $z^3 = w$.)

3.38.a) $v=\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi$ **b)** $\begin{cases} v_1=\frac{\pi}{6}+n\cdot 2\pi \\ v_2=\frac{5\pi}{6}+n\cdot 2\pi \end{cases}$

c) $\alpha=\pm\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi,\ -\frac{\pi}{6}+n\cdot 2\pi,\ \frac{7\pi}{6}+n\cdot 2\pi$

d) $x=n\cdot\pi,\ \pm\arccos\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)+n\cdot 2\pi$ **e)** $v=\pm\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi$

4.1.a) $-3+i2$ **b)** $-5+i4$ **c)** $-1+i7$ **d)** $-\frac{7}{2}-i\frac{1}{2}$ **e)** 25

f) -4 **g)** 3 **h)** -1 **i)** $1-i$ **j)** $-2-i2$ **k)** $\frac{17}{50}$

4.2.a) $-20+i5$ **b)** $\frac{8}{5}-i\frac{19}{5}$ **c)** $-2+i2$ **d)** -4

4.3.a) $-\dfrac{y}{x^2+y^2}$ **b)** $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ **c)** $-\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

4.5.a) $r=\pm 2;\ z=\pm 2$ **b)** $r=\pm\frac{1}{2};\ z=\pm 2+i3$

4.6.a) $z=-2-i3$ **b)** $z=\frac{1}{2}-i\frac{1}{4}$

4.7.a) $z_{1,2}=\pm i$ **b)** $z_{1,2}=-1\pm i$ **c)** $z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}};\ z_{1,2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$

d) $z_1=-i;\ z_2=-4+i$ **e)** $z_1=1-i2;\ z_2=-2+i3$

4.8. $w_1=-3+i,\ w_2=8+i$ $\left((z-z_1)(z-z_2)=z^2-(z_1+z_2)z-z_1z_2\right)$

4.9. $z_1=-1,\ z_{2,3}=1\pm i2$ (Möjliga heltalsrötter: $\pm 1, \pm 5$)

4.10. $z_{1,2}=\pm i2;\ z_{3,4}=1\pm\sqrt{2}$

4.11) $z_{1,2}=1\pm i2;\ z_{3,4}=2\pm i$

b) $(z-1-i2)(z-1-i2)(z-2-i)(z-2+i)$

c) $(z^2-2z+5)(z^2-4z+5)$

4.12. $z_{1,2}=3\pm i;\ z_{3,4}=2\pm\sqrt{3};\ a=-10;\ b=10$

4.13. $z_{1,2} = 2 \pm i;\ z_{3,4} = \pm\sqrt{6}$

4.14. $k = -3;\ (\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 3)\quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$

4.15. $x = \sqrt{2}$

4.16. $\begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 = 2 \\ z_{3,4} = -1 \pm i \end{cases}$

4.17. a) $\begin{cases} z_1 = \frac{1}{2} \\ z_{2,3} = \pm i \\ z_{4,5} = -1 \pm i2 \end{cases}$ **b)** $(2z+1)(z^2+1)(z^2+2z+5)$

4.18.a) $\sqrt{5}$ **b)** 13 **c)** $\sqrt{65}$ **d)** $\sqrt{65}$ **e)** $\sqrt{\frac{5}{13}}$ **f)** $\sqrt{\frac{5}{13}}$

4.19. $(\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{4}$ ger att $x^2 + y^2 = 4x)$

4.20.a) $2e^{i\frac{\pi}{2}}$ **b)** $3e^{i\pi}$ **c)** $4e^{-i\frac{\pi}{2}}$ **d)** $\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ **e)** $\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$

f) $\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$ **g)** $2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$ **h)** $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ **i)** $\sqrt{13}\,e^{i0,98}$

4.21. $z = \frac{\sqrt{6}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4}\quad \left(z = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{3\pi}{4}}} \right)$

4.22. -1

4.23.a) -1 **b)** $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{3}{2}$ **d)** $2\sqrt{3} - i2$

4.24.a) $i2$ **b)** $-i12$

4.25.a) $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$ **b)** $\tan 4\theta = \dfrac{4\tan\theta - 4\tan^3\theta}{1 - 6\tan^2\theta + \tan^4\theta}$

4.27.a) $\begin{cases} z_0 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{2} \end{cases}$ **b)** $z_k = \sqrt[12]{12}\, e^{i\frac{3k+1}{9}\pi}; k = 0,1,2,3,4,5$

c) $\begin{cases} z_0 = \sqrt{3} + i \\ z_1 = -1 + i\sqrt{3} \\ z_2 = -\sqrt{3} - i \\ z_3 = 1 - i\sqrt{3} \end{cases}$

4.28. $1, -\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4.29. $-2, -i,\ 1 \pm i\sqrt{3},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$