Tentamen i Matematik för Tekniskt Basår, MVE425B

2015 01 16 kl. 14.00–18.00.

Hjälpmedel: Bifogat formelblad (baksidan), typgodkänd miniräknare.

Telefon: Lennart Falk 772 3564

För godkänt krävs minst 20 poäng. Betyg 3: 20-31 poäng, betyg 4: 32-41 poäng, betyg 5: 42-50 poäng.

Lösningar och besked om granskningsmöjligheter lämnas på kursens hemsida:

http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve425b/1415/

Skriv din personliga tentamenskod på samtliga inlämnade papper. Examinator: Lennart Falk

---

1. Lös ekvationerna

   (a) $3^x = 3 \cdot 2^x$ (2p)

   (b) $3 \ln 2 + \ln(x-1) = \ln x + \ln 7$ (3p)

   (c) $\bar{z} = \dfrac{10}{3+i}$ (bestäm det komplexa talet z). (2p)

2. Bestäm samtliga lösningar till ekvationerna

   (a) $2\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}$ (svara i radianer med exakta värden) (3p)

   (b) $\sin(5x - 60°) = \frac{1}{2}$ (svara i grader med exakta värden). (3p)

3. Två personer A och B befinner sig 2,0 km från varandra. Marken mellan dem är horisontell. En ballong C befinner sig i luften rakt ovanför sträckan AB (mellan observatörerna). A ser ballongen i en riktning som bildar vinkeln 45° mot linjen AB, medan motsvarande vinkel sett från B är 60° (alltså vinklar i triangeln ABC). På vilken höjd är ballongen? (6p)

4. (a) Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$. (4p)

   (b) Bestäm konstanten a så att gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{x^2+5x+a}{x^2-3x-4}$ existerar, och bestäm sedan gränsvärdet. (4p)

5. En funktion f definieras för alla reella tal x enligt (3p)

$$f(x) = \begin{cases} a - x^2 & \text{om} \quad x \le 0 \\ \frac{\cos x \sin 2x}{x} & \text{om} \quad x > 0 \end{cases}$$

   Hur ska man välja konstanten a för att f ska vara en kontinuerlig funktion? Motivera väl!

6. (a) Beräkna $\dfrac{(2+2i)^6}{(-\sqrt{3}+i)^6}$ och svara i så enkel form som möjligt. (4p)

   (b) Ange ett fjärdegradspolynom som har *reella koefficienter* och nollställena $z = 4 - i$ och $z = i$. (4p)

7. En lösning till ekvationen (6p)

$$2\tan x + \frac{1}{\cos x} = 1$$

   är $x = 0$, men det finns ju fler. Bestäm *alla* lösningar.

8. Formulera och bevisa de tre logaritmlagarna för naturliga logaritmen (eller 10-logaritmen om du föredrar det). (6p)

TRIGONOMETRISKA FORMLER

Additions- och subtraktionsformlerna

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

Formler för dubbla vinkeln

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

Omskrivning till amplitud-fasvinkelform

$a\cos v + b\sin v = c\sin(v + \phi)$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\phi = \arctan\dfrac{a}{b}$ om $b > 0$

$\phi = \arctan\dfrac{a}{b} + \pi$ om $b < 0$