Tenta MVE425 2015-01-16: lösningsförslag.

1. (a) Med log-lagarna (byt gärna ln mot lg överallt, det fungerar lika bra):

$$\ln(3^x) = \ln(3 \cdot 2^x)$$

$$x \ln 3 = \ln 3 + x \ln 2$$

$$x \ln 3 - x \ln 2 = \ln 3$$

$$x(\ln 3 - x \ln 2) = \ln 3$$

$$x = \frac{\ln 3}{\ln 3 - x \ln 2}$$

Svar: $\mathbf{x} = \dfrac{\ln \mathbf{3}}{\ln \mathbf{3} - \mathbf{x} \ln \mathbf{2}} = \dfrac{\ln \mathbf{3}}{\ln \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}}$

(b) Också här är det logaritmlagarna som behövs. Vi konstaterar först att $x > 1$ är nödvändigt för att ekvationens båda led ska vara definierade.

$$\ln(x-1) - \ln x = \ln 7 - 3 \ln 2$$

$$\ln \frac{x-1}{x} = \ln 7 - \ln 2^3$$

$$\ln \frac{x-1}{x} = \ln \frac{7}{8}$$

$$\frac{x-1}{x} = \frac{7}{8}$$

$$8(x-1) = 7x$$

$$x = 8$$

Vår lösning uppfyller $x > 1$ och är alltså OK. Svar: $\mathbf{x} = \mathbf{8}$

(c)

$$\bar{z} = \frac{10}{3+i} = \frac{10(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{10(3-i)}{10} = 3 - i \;\Rightarrow\; z = 3 + i$$

Svar: $\mathbf{z} = \mathbf{3} + \mathbf{i}$

2. (a)

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pm \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + n \cdot 2\pi = \pm\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi, \ n \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{12} + n \cdot \pi$$

Svar: $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{24} + n \cdot \pi, & n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{24} + n \cdot \pi, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

(b)

$$\sin(5x - 60°) = \frac{1}{2}$$

$$5x - 60° = \begin{cases} \arcsin\frac{1}{2} + n \cdot 360° = 30° + n \cdot 360°, & n \in \mathbb{Z} \\ 180° - \arcsin\frac{1}{2} + n \cdot 360° = 150° + n \cdot 360°, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Vi löser ut x och får

Svar: $\mathbf{x} = \begin{cases} 18° + n \cdot 72°, & n \in \mathbb{Z} \\ 42° + n \cdot 72°, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

3. Vi har en triangel med vinklarna $A = 45°$, $B = 60°$ och $C = 180 - A - B = 75°$ (vid ballongen). Med små bokstäver för motstående sidor har vi då med sinussatsen:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{c \sin B}{\sin C}$$

Om D är punkten rakt under C på sträckan AB, så är vinkeln ADC rät, så höjden blir

$$CD = b \sin A = \frac{c \sin B \sin A}{\sin C} = \frac{2,0 \sin 60° \sin 45°}{\sin 75°} \approx 1,27$$

Svar: **1,3 km** (exakt $3 - \sqrt{3}$, men det krävdes ej).

4. (a) Konjugatförlängning ger

$$\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\frac{(x-3)-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\to\frac{1}{4}\quad\text{då } x\to 1$$

Svar: $\mathbf{\frac{1}{4}}$

(b) Eftersom $x^2-3x-4\to 0$ då $x\to 4$, så är enda chansen till gränsvärde att även täljaren har nollstället 4. Detta ger oss konstanten a: $4^2+5\cdot 4+a=0 \Rightarrow a=-36$. Båda polynomen har nu nollstället 4 och har därmed enligt faktorsatsen faktorn $x-4$. Faktoruppdela:

$$\frac{x^2+5x-36}{x^2-3x-4}=\frac{(x-4)(x+9)}{(x-4)(x+1)}=\frac{x+9}{x+1}\to\frac{13}{5}\text{ då } x\to 4$$

Svar: $\mathbf{\frac{13}{5}}$

5. För kontinuitet i $x=0$ krävs att gränsvärdet av funktionen då x går mot noll ska vara lika med funktionsvärdet, dvs $f(0)=a$. I övriga punkter har vi kontinuitet eftersom funktionen där överensstämmer med funktioner som vi vet är kontinuerliga, det är bara ”skarven” som är oklar. Nu är $\lim_{x\to 0^-} f(x)=a$ och

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x\sin 2x}{x}=\text{(sinusformeln för dubbla vinkeln)}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos^2 x\cdot 2\sin x\cos x}{x}=\lim_{x\to 0^+}2\cos^2 x\frac{\sin x}{x}=2\cdot 1^2\cdot 1=2$$

Gränsvärdet finns om vänster- och högergränsvärdena är lika, dvs om $a=2$.

Svar: $\mathbf{a=2}$

6. (a) Skriv täljare och nämnare i polär form. Vi har då (rita komplext talplan!) att $2+2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ och $-\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$. Våra exponentiella räknelagar kan nu användas:

$$\frac{(2+2i)^6}{(-\sqrt{3}+i)^6} = \frac{(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^6}{(2e^{i\frac{5\pi}{6}})^6} = \frac{2^6 2^3 e^{i\frac{3\pi}{2}}}{2^6 e^{i\cdot 5\pi}} = \frac{8(-i)}{-1} = 8i$$

Svar: $\mathbf{8i}$

(b) Om koefficienterna är reella, så vet vi att konjugaten till de givna nollställena också är nollställen. Av faktorsatsen vet vi också att $z-(4-i)$, $z-(4+i)$, $z-i$ och $z+i$ är faktorer i polynomet. Det enklaste fjärdegradspolynomet är då produkten av dessa faktorer:

$$p(z) = ((z-4)+i)((z-4)-i)(z-i)(z+i) = ((z-4)^2+1)(z^2+1) = (z^2-8z+17)(z^2+1) =$$

Svar: $\mathbf{z^4 - 8z^3 + 18z^2 - 8z + 17}$

7. Vi skriver om ekvationen lite:

$$\begin{aligned} 2\tan x + \frac{1}{\cos x} &= 1 \\ \frac{2\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} &= 1 \\ 2\sin x + 1 &= \cos x \\ \cos x - 2\sin x &= 1 \end{aligned}$$

Vi skriver om vänsterledet i amplitud-fasvinkelform $c\sin(x+\phi)$, varvid $c = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$ och $\phi = \arctan(-\frac{1}{2}) + 180° = -\arctan\frac{1}{2} + 180°$ (koefficienten för $\sin x$ är negativ, då ska adderas $\pi = 180°$). vi fortsätter med ekvationen:

$$\begin{aligned} \sqrt{5}\sin(x - \arctan\frac{1}{2} + 180°) &= 1 \\ \sin(x - \arctan\frac{1}{2} + 180°) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

med lösningarna

$$x = \begin{cases} \arctan\frac{1}{2} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - 180° + n\cdot 360°, & n \in \mathbb{Z} \\ \arctan\frac{1}{2} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + n\cdot 360°, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Faktum är att $\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} = \arctan\frac{1}{2}$ (rita en rätvinklig triangel med sidorna 1, 2 och $\sqrt{5}$ för att se det!), så lösningarna kan kortare skrivas

Svar:

$$x = \begin{cases} 2\arctan\frac{1}{2} - 180° + n\cdot 360° \approx -126,9° + n\cdot 360°, & n \in \mathbb{Z} \\ n\cdot 360°, & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(man ser att lösninge $x = 0°$ finns i det andra uttrycket med $n = 0$). Den här gjorda förenklingen av arcusfunktionerna krävs ej. Räknar man rätt, så ser man då på räknaren att noll blir en lösning.

8. Se läroboken!