Tenta MVE425 2015-02-13: lösningsförslag.

1. (a) $pH = -\log[H^+] \iff [H^+] = 10^{-pH} = 10^{-5,6} \approx 2,5 \cdot 10^{-6}$

Svar: $[\mathbf{H}^+] \approx \mathbf{2,5 \cdot 10^{-6}}$ mol/l.

(b) Halvering inträffar då $m = \frac{C}{2}$ dvs om halveringstiden heter t_*:

$$e^{-0,0235t_*} = \frac{1}{2} \iff e^{0,0235t_*} = 2 \iff 0,0235t_* = \ln 2$$

$$\iff t_* = \frac{\ln 2}{0,0235} \approx 21,3$$

Svar: **21,3 dygn**.

(c) Här omformar vi ekvationen med logaritmlagarna. Vi fastslår först att ekvationens båda led är definierade för $x > 7$.

$$\ln(x-3) - \ln 3 = 2\ln 2 - \ln(x-7),\ x > 7$$

$$\iff$$

$$\ln(x-3) + \ln(x-7) = 2\ln 2 + \ln 3,\ x > 7$$

$$\iff$$

$$\ln((x-3)(x-7)) = \ln(2^2 \cdot 3),\ x > 7$$

$$\iff$$

$$(x-3)(x-7) = 12,\ x > 7$$

$$\iff$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0,\ x > 7$$

$$\iff$$

$$x = 5 \pm 4,\ x > 7$$

Härav ser vi att bara den ena av andragradarens rötter duger: Svar: $\mathbf{x = 9}$

2. (a)

$$\tan(3x + \frac{\pi}{4}) = -1$$

$$3x + \frac{\pi}{4} = \arctan(-1) + n \cdot \pi = -\frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$3x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Svar: $\mathbf{x} = -\frac{\pi}{\mathbf{6}} + \mathbf{n} \cdot \frac{\pi}{\mathbf{3}} \quad (\mathbf{n} \in \mathbb{Z})$

(b)

$$\cos 5x = \cos 2x$$

$$5x = 2x + n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad 5x = -2x + n \cdot 2\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$3x = n \cdot 2\pi \quad \text{eller} \quad 7x = n \cdot 2\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Svar: $\mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{2}\pi}{\mathbf{3}}$ eller $\mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{2}\pi}{\mathbf{7}}$

3. Kontinuitet i $x = -2$ innebär att $\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2) = b$ (i övriga punkter är f kontinuerlig). Då nämnaren går mot noll, måste detta gälla även täljaren - annars inget gränsvärde! Vi får därav $a - 4 = 0$, dvs $a = 4$. Då kan vi gå vidare till själva gränsvärdet:

$$\frac{4 - x^2}{2 + x} = \frac{(2 + x)(2 - x)}{2 + x} = 2 - x$$

Gränsvärdet av detta då $x \to -2$ är $4 = b$.

Svar: **a=b=4**

4. (a) Konjugatförlängning ger

$$\frac{\sqrt{2x+10}-2}{x+3} = \frac{(\sqrt{2x+10}-2)(\sqrt{2x+10}+2)}{(x+3)(\sqrt{2x+10}+2)} = \frac{(2x+10)-4}{(x+3)(\sqrt{2x+10}+2)} =$$

$$= \frac{2(x+3)}{(x+3)(\sqrt{2x+10}+2)} = \frac{2}{\sqrt{2x+10}+2} \to \frac{1}{2} \quad \text{då} \quad x \to -3$$

Svar: $\mathbf{\frac{1}{2}}$

(bc)

$$\frac{5x+4}{\sqrt{9x^2-8x}} = \frac{x(5+\frac{4}{x})}{\sqrt{x^2(9-\frac{8}{x})}} = \frac{x(5+\frac{4}{x})}{\sqrt{x^2}\sqrt{9-\frac{8}{x}}} = \frac{x(5+\frac{4}{x})}{|x|\sqrt{9-\frac{8}{x}}}$$

För positiva x är uttrycket lika med $\frac{5+\frac{4}{x}}{\sqrt{9-\frac{8}{x}}}$, för negativa x är det $-\frac{5+\frac{4}{x}}{\sqrt{9-\frac{8}{x}}}$. Vi får därmed gränsvärdena då $x \to \infty$ respektive $x \to -\infty$.

Svar: (a) $\mathbf{\frac{5}{3}}$, (b) $-\mathbf{\frac{5}{3}}$

5. Högerledet skrivs i poär form:

$$2(-1+i\sqrt{3}) = 4e^{i(\frac{2\pi}{3}+n\cdot 2\pi)} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Om vi sätter $z = re^{iv}$, så blir vänsterledet $r^4 e^{i4v}$. Vi jämför absolutbelopp och argument och får:

$$\begin{cases} r^4 = 4 \\ 4v = \frac{2\pi}{3} + n\cdot 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2} \\ v = \frac{\pi}{6} + n\cdot\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

så vi har $z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{6}+n\cdot\frac{\pi}{2}}$, där alla lösningar hittas om man väljer $n = 0, 1, 2, 3$ (p.g.a. periodicitet). Om vi börjar med $n = 0$, får vi $z_0 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$. För $n = 1$ konstaterar vi att $e^{iu+i\frac{\pi}{2}} = e^{iu}i$, så vi kan förenkla de fortsatta beräkningarna genom att multiplicera med i för varje ny rot: $z_1 = iz_0$, $z_2 = iz_1 = -z_0$ och $z_3 = iz_2 = -iz_0$

Svar: $\mathbf{z} = \pm(\frac{\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{2}} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}})$, $\mathbf{z} = \pm(\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{2}})$

6. Eftersom ekvationen endast har reella koefficienter, så vet vi att om z_0 är en rot, så är också $\bar{z}_0$ rot till ekvationen. Vidare, enligt faktorsatsen, är $z - z_0$ och $z - \bar{z}_0$ faktorer i polynomet i vänsterledet. Detta gäller även deras produkt, som här blir $(z - \sqrt{2}i)(z + \sqrt{2}i) = z^2 + 2$. Vi konstaterar att $z^4 - 4z^3 + 15z^2 - 8z + 26 = (z^2 + 2)(z^2 - 4z + 13)$ (pröva term för term eller ställ upp en lång division). De återstående rötterna är nollställena till andragradspolynomet $z^2 - 4z + 13$, dvs $z = 2 \pm 3i$. Svar: $\mathbf{z = -\sqrt{2}i}$, $\mathbf{z = 2 \pm 3i}$

7. I vänsterledet står det $\sin v \sin 5v$, som vi kan känna igen från subtraktions- och additionsformlerna för cosinus:

$$\cos(5v - v) = \cos 5v \cos v + \sin 5v \sin v$$

$$\cos(5v + v) = \cos 5v \cos v - \sin 5v \sin v$$

Om vi subtraherar dessa ekvationer ledvis, får vi

$$\cos 4v - \cos 6v = 2 \sin 5v \sin v$$

dvs

$$\sin v \sin 5v = \frac{\cos 4v - \cos 6v}{2}$$

VSB

8. Se läroboken!