Tenta MVE425 2015-08-26: lösningar.

1. (a) Logaritmlag nr 3 ger

$$3\ln x + 1 = 2 + \ln x \quad \Longleftrightarrow \quad \ln x = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x = e^{-1}}$$

(b) Vi löser ekvationen

$$10000 = 1000e^{0,64t}$$

och får då

$$e^{0,64t} = 10 \quad \Longleftrightarrow \quad 0,64t = \ln 10 \quad \Longleftrightarrow \quad t = \frac{\ln 10}{0,64} \approx 3,6$$

Tiden är alltså **cirka 3,6 timmar**.

2. (a) Ekvationens alla lösningar är (med $n \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{cases} 5x = 30^\circ + n \cdot 360^\circ \\ 5x = 180^\circ - 30^\circ + n \cdot 360^\circ \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 6^\circ + n \cdot 72^\circ \\ x = 30^\circ + n \cdot 72^\circ \end{cases}$$

Lösningarna mellan 0° och 90° får vi med $n = 0$ och $n = 1$ i första ekvationen och med $n = 0$ i den andra: $\mathbf{x = 6^\circ},\ \mathbf{x = 30^\circ},\ \mathbf{x = 78^\circ}$

(b)

$$\tan(x - \frac{\pi}{6}) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x = \frac{5\pi}{12} + n \cdot \pi \quad (n \in \mathbb{Z})}$$

(c)

$$\cos 2x = \cos \frac{\pi}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad 2x = \pm \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x = \pm \frac{\pi}{8} + n \cdot \pi \quad (n \in \mathbb{Z})}$$

3. Känt: sidor $b = 6$, $c = 5$ och vinkel $A = 20^\circ$. Triangelns tredje sida a beräknas med cosinussatsen:

$$a^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cos 20^\circ \quad \Rightarrow \quad a \approx 2,15$$

Största vinkeln B står mot största sidan $b = 6$. antingen beräknar man den med cosinussatsen (den är ju den enda som kan vara trubbig, vilket cosinus avslöjar), eller så tar man vinkeln C som står mot sidan $c = 5$ med sinussatsen (då vet man att enda alternativet är räknarens spetsiga förslag). Här väljer jag cosinussatsen igen:

$$6^2 = a^2 + 5^2 - 2 \cdot a \cdot 5 \cos B \quad \Rightarrow \quad \cos B = \frac{a^2 + 5^2 - 6^2}{10a}$$

Räknaren ger $B \approx 107,3^\circ$ och $C = 180 - 20^\circ - B$.

Återstående sida $\approx \mathbf{2,15}$ **cm**, vinklar $\approx \mathbf{107,3^\circ}$ och $\approx \mathbf{52,7^\circ}$.

4. Ekvationen löses enklast i polär form. med $z = re^{iv}$:

$$r^6 e^{i6v} = 2^6 e^{i(\pi + n\cdot 2\pi)} \quad \Longleftrightarrow \quad r = 2, \quad v = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3} \quad (n = 0,1,2,3,4,5)$$

$$z = 2(\cos(\frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}))$$

Vi matar in de olika värdena på n och med kända sinus- och cosinusvärden får vi

$$\mathbf{z = \sqrt{3} + i,\ z = 2i,\ z = -\sqrt{3} - i,\ z = -\sqrt{3} - i,\ z = -2i,\ z = \sqrt{3} - i}$$

5. (a)

$$\frac{x^2-x-12}{x-4} = \frac{(x-4)(x+3)}{x-4} = x+3 \ \to \mathbf{7} \quad \text{då } x \to 4$$

(b) Konjugatförlängning är grejen:

$$\frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5} = \frac{(\sqrt{x+4}-3)(\sqrt{x+4}+3)}{(x-5)(\sqrt{x+4}+3)} = \frac{(x+4)-3^2}{(x-5)(\sqrt{x+4}+3)} =$$

$$= \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x+4}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x+4}+3} \ \to \ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} \text{ då } x \to 5$$

6. Additionsformeln för sinus ger

$$c\sin(x+\phi) = c\sin\phi\cos x + c\cos\phi\sin x$$

som jämförs med

$$5\cos x - 12\sin x$$

Då är

$$\begin{cases} c\sin\phi &= 5 \\ c\cos\phi &= -12 \end{cases}$$

Vi har då $c^2 = (c\sin\phi)^2 + (c\cos\phi)^2 = 5^2 + (-12)^2 = 13^2$, välj den positiva roten $c = 13$. Då blir tydligen $\sin\phi > 0,\ \cos\phi < 0$, så ϕ ligger i andra kvadranten. Eftersom $\tan\phi = \dfrac{\sin\phi}{\cos\phi} = -\dfrac{5}{12}$, så får vi till slut

$$\mathbf{c = 13},\ \phi = \arctan(-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}) + \mathbf{180^\circ} \approx \mathbf{157{,}4^\circ}$$

7. Bärande idé: ekvationen *har reella koefficienter*, då uppträder alla icke-reella rötter i konjugerade par $a \pm bi$. Så förutom $2-i$ och $2i$ är därför också deras konjugat $2+i$ och $-2i$ rötter. Enligt faktorsatsen är polynomet i vänsterledet delbart med

$$(z-2-i)(z-2+i)(z-2i)(z+2i) = ((z-2)^2 - i^2)(z^2-(2i)^2) =$$

$$= (z^2-4z+5)(z^2+4) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 16z + 20$$

och vi faktoriserar det ursprungliga polynomet (division på ett eller annat sätt):

$$z^5 - 3z^4 + 5z^3 - 7z^2 + 4z + 20 = (z+1)(z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 16z + 20)$$

Det återstående nollstället till polynomet är tydligen $z = -1$.

Återstående rötter är $\mathbf{z = 2+i},\ \mathbf{z = -2i},\ \mathbf{z = -1}$.

8. Se läroboken!