Tentamen i Matematik, del B, för Tekniskt basår

Kurskod: MVE425 B
Telefonvakt:Helena Johansson tel. 0739-803569
Datum: 15 januari 2016
Tid för tentamen: 14.00 - 18.00
Hjälpmedel: Bifogat formelblad (sista sidan), typgodkänd miniräknare.
Betygsgränser: Betyg 3: 20 - 31, Betyg 4: 32 - 41, Betyg 5: 42 - 50

"It is impossible to be a mathematician without being a poet in soul."

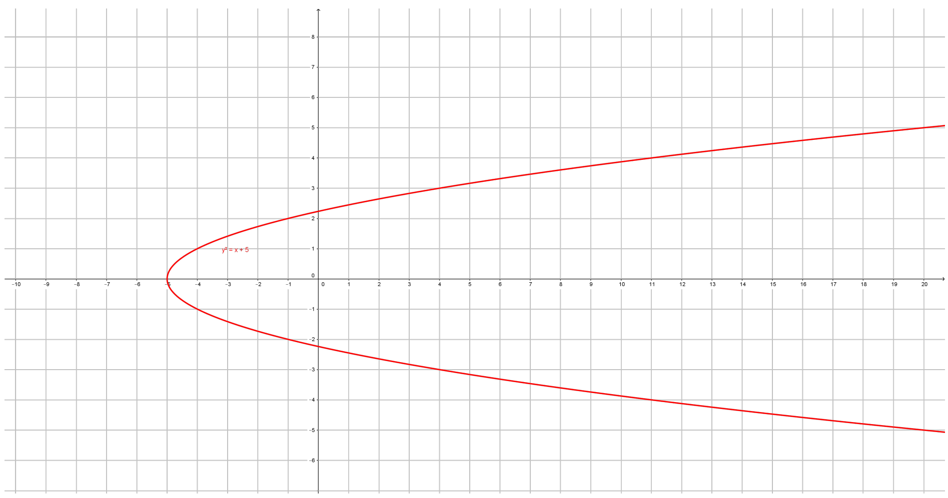
(Sofia (Sonya) Kovalevsky, 1850 - 1891)

1. Använd definitionen av funktionsbegreppet för att avgöra om följande uttryck beskriver en funktion.

   Om det är en funktion, ange då också definitionsmängd och värdemängd till funktionen.

   (a) $y^2 = x + 5$ (2p)

   Lösning: $y^2 = x+5$ beskriver ingen funktion, eftersom för alla $x > -5$ så ger varje värde på x två olika värden på y. Enligt def ska en funktion uppfylla villkoret att det för varje x i en (definitions)mängd finns ett och endast ett y i en (värde)mängd så att $y = f(x)$.

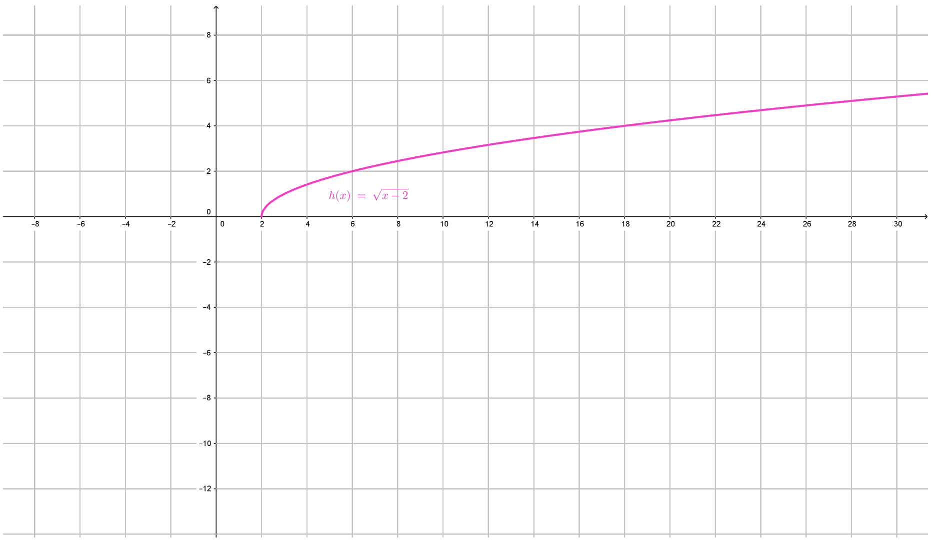


Poängsättning

Korrekt svar med godtagbar motivering utifrån def av fkt (+2p)

(b) $y = \sqrt{x-2}$ (2p)

Lösning: Variant av def. Om varje element (x) i en mängd A entydigt tillordnas ett element (y) i en mängd B säger man man har en funktion (f) från A till B, $y = f(x)$. Uttrycket $y = \sqrt{x-2}$ uppfyller detta villkor, eftersom "kvadratroten ur ett tal x är det icke-negativa tal y vars kvadrat är lika med x, $y^2 = x$". Kvadratrotsfunktionen är bara definierad för icke-negativa tal, så definitionsmängden till funktionen ovan är $[2, \infty)$, och värdemängden är $[0, \infty)$



Svar: $f(x) = y = \sqrt{x-2}$, med $D_f = [2, \infty)$ och $V_f = [0, \infty)$

Poängsättning

Godtagbar anv av def för att komma fram till att det är en funktion (+1p)

Anger korrekt definitionsmängd och värdemängd (+1p)

2. Bestäm samtliga lösningar med exakta värden till ekvationerna

(a) $\cos(5v - 24°) = \cos(3v)$ (*Svara i grader*) (3p)

Lösning:

$\cos(5v - 24°) = \cos(3v) \iff 5v - 24° = \pm 3v + n \cdot 360°, n \in \mathbf{Z}$
$\implies 5v - 24° = 3v + n \cdot 360°, n \in \mathbf{Z} \iff 2v = 24° + n \cdot 360° \iff$
$v = 12° + n \cdot 180°, n \in \mathbf{Z}$

eller

$\implies 5v - 24° = -3v + n \cdot 360°, n \in \mathbf{Z} \iff 8v = 24° + n \cdot 360° \iff$
$v = 3° + n \cdot 45°, n \in \mathbf{Z}$

Svar: $v = \begin{cases} 12^\circ + n \cdot 180^\circ \\ 3^\circ + n \cdot 45^\circ \end{cases}, n \in \mathbf{Z}$

Poängsättning

Godtagbar ansats av lösning, tex både + och - lösning (+1p)

Rimlig, men ej fullständig lösning, tex vinkel rätt för båda lösningar men glömt period, eller bara ena lösning korrekt (+1p)

Korrekt lösning (+1p)

(b) $\sin(\frac{\pi}{3} + v) = -1$ (*Svara i radianer*) (3p)

Lösning:

$\sin(\frac{\pi}{3} + v) = -1 \iff \frac{\pi}{3} + v = \arcsin(-1) + n \cdot 2\pi, n \in \mathbf{Z} \iff \frac{\pi}{3} + v = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi$, obs! bara "ett värde för vinkeln" då $\sin v = -1$, tänk på enhetscirkeln.

$\frac{\pi}{3} + v = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi \iff v = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \iff v = \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi, n \in \mathbf{Z}$

Svar: $v = \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi, n \in \mathbf{Z}$

Poängsättning

Godtagbar ansats av lösning, tex arcsin + period (+1p)

Rimlig, men ej fullständig lösning, tex vinkel rätt men glömt period, eller rätt period men ngn felräkning på vinkeln (+1p)

Korrekt lösning (+1p)

3. Lös följande ekvationer

(a) $2z + 1 - i = \bar{z} + 3 + 2i$ (*Svara på $x + iy$-form*) (2p)

Lösning:

Vi har både z och $\bar{z}$ i ekvationen och skriver då $z = a + ib \implies 2z + 1 - i = \bar{z} + 3 + 2i \iff 2(a + ib) + 1 - i = (a - ib) + 3 + 2i \iff 2a + i2b - a + ib = 3 + 2i - 1 + i \iff a + i3b = 2 + 3i$.

Nu sätter vi realdelarna lika och imaginärdelarna lika

$$\implies \begin{cases} a = 2 \\ 3b = 3 \iff b = 1 \end{cases} \iff z = 2 + i$$

Svar: $z = 2 + i$

Poängsättning

Godtagbar ansats av lösning, tex z och $\bar{z}$ på x+iy-form (+1p)

Godtagbar lösning (+1p)

(b) $z^4 = -16i$, markera även lösningarna i det komplexa talplanet. (5p)

Lösning:

Vi skriver om z och $-16i$ på polär form så att

$z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ och
$-16i = 16(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$.
Då får vi
$z^4 = -16i \iff r^4(\cos\phi + i\sin\phi)^4 = 16(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$

$\underset{\text{enl. de Moivre}}{\iff} r^4(\cos 4\phi + i\sin 4\phi) = 16(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$

För att VL och HL ska vara lika måste belopp och argument vara lika, detta ger oss att

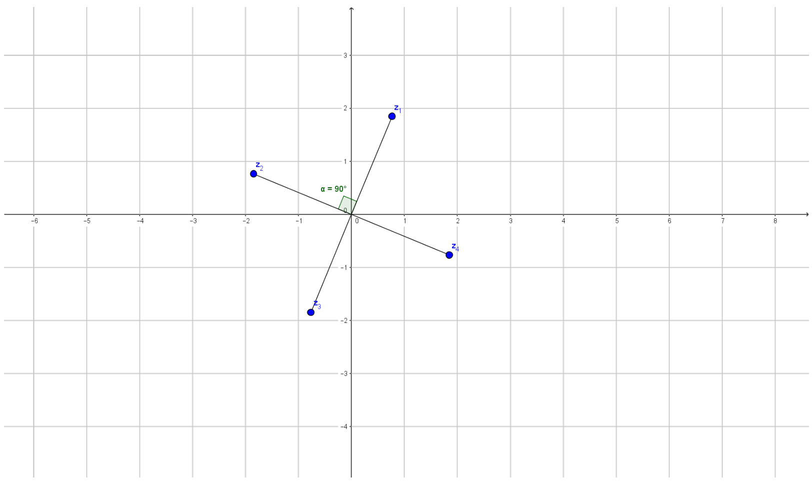
$$\begin{cases} r^4 = 16 \\ 4\phi = \frac{3\pi}{2} + k\cdot 2\pi, k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

$$\iff$$

$$\begin{cases} r = \sqrt[4]{16} = 2 \\ \phi = \frac{3\pi}{8} + k\cdot\frac{\pi}{2}, k = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

detta ger oss lösningarna $\begin{cases} z_1 = 2(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}) \\ z_1 = 2(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}) \\ z_1 = 2(\cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8}) \\ z_1 = 2(\cos\frac{15\pi}{8} + i\sin\frac{15\pi}{8}) \end{cases}$

De fyra lösningar kan sägas bilda en kvadrat i det komplexa talplanet,



Poängsättning

Godtagbar ansats av lösning, tex skriver om -16i på polär form (+1p)

Skriver upp ekv.systemet/villkoren (+1p)

Godtagbar lösning med minst två rötter korrekt (+1p)

Godtagbart svar av alla 4 rötter (+1p)

Godtagbart kompl.talplan med minst 3 rötter rimligt markerade (+1p)

(c) $z^3 - 8z^2 + 14z + 68 = 0$, då en av rötterna är komplex med imaginärdelen 3. (*Svara på $x + iy$ form*) (5p)

Lösning: sätt $p(z) = z^3 - 8z^2 + 14z + 68$ och låt $z_1 = x + 3i$ vara en rot till $p(z) = 0$. Alla koefficienter i $p(z)$ är reella så enligt satsen om komplexkonjugerade rötter är då också $z_2 = \bar{z_1} = x - 3i$ en rot till $p(z) = 0$. Tillsammans med algebrans fundamentalsats vet vi då också att att $p(z) = 0$ har en tredje rot z_3 som är reell.

Enligt satsen om faktoruppdelning kan vi nu skriva
$p(z) = (z - (x + 3i))(z - (x - 3i))(z - z_3) =$
$= (z-x-3i)(z-x+3i)(z-z_3) = ((z-x)-3i)((z-x)+3i)(z-z_3) =$
$= ((z-x)^2 - (3i)^2)(z-z_3) = (z^2 - 2xz + (x^2 - 9i^2))(z - z_3) =$
$= z^3 - z^2z_3 - 2xz^2 + 2xzz_3 + (x^2+9)z - (x^2+9)z_3 =$
$= z^3 - z^2(z_3 + 2x) + z(2xz_3 + x^2 + 9) - (x^2 + 9)z_3$

Vi har alltså att $p(z) = z^3 - z^2(z_3+2x) + z(2xz_3+x^2+9) - (x^2+9)z_3$ och koefficienterna i detta uttryck måste då vara lika med koefficienterna i det uttryck vi startade med.

Detta ger då att $\begin{cases} 8 = z_3 + 2x \implies z_3 = 8 - 2x \\ 14 = 2xz_3 + x^2 + 9 \underset{\text{från ovan}}{\implies} 14 = 2x(8-2x) + x^2 + 9 \\ 68 = -(x^2+9)z_3 \end{cases}$

$14 = 2x(8-2x) + x^2 + 9 \iff 14 = 16x - 4x^2 + x^2 + 9 \iff 3x^2 - 16x + 5 = 0 \iff x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{5}{3} = 0 \iff x = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9} - \frac{15}{9}} \iff x = \frac{8}{3} \pm \frac{7}{3}$

Vi får två värden på x, men det ena är en falsk rot eftersom vi antagit att x betecknar realdelen i de två komplexa lösningarna z_1 och $z_2 = \bar{z_1}$ till $p(z) = 0$. Så vi får testa vilket som stämmer.

$x = \frac{8}{3} + \frac{7}{3} = \frac{15}{3} = 5 \underset{\text{enl ovan}}{\implies} z_3 = 8 - 10 = -2$. Testa detta i det tredje villkoret
VL $= -(x^2+9)z_3 = -(25+9)\cdot(-2) = -34\cdot(-2) = 68 =$ HL. Så denna lösning stämmer.

Skulle vi testat den andra lösningen först får vi:
$x = \frac{8}{3} - \frac{7}{3} = \frac{1}{3} \underset{\text{enl ovan}}{\implies} z_3 = 8 - \frac{2}{3} = \frac{22}{3}$.
Testa detta i det tredje villkoret
VL $= -(x^2+9)z_3 = -(\frac{1}{9}+9)\cdot(\frac{22}{3}) < 0 \neq 68 =$ HL. Så denna lösning stämmer inte.

Svar: $\begin{cases} z_1 = 5 + 3i \\ z_2 = 5 - 3i \\ z_3 = -2 \end{cases}$

Poängsättning

Godtagbar ansats av lösning, tex anger att komplexkonjugat också är lösning (+1p)

Rimlig fortsättning, tex skriver p(z) som produkt av faktorer (+1p)

Godtagbar förenkling av uttrycket för p(z) med "rötterna", samt börja jmf någon koefficient (+1p)

T.ex. godtagbar början till lösning av ekv.system med "koefficienter" (+1p)

Godtagbart svar av de tre lösningarna (+1p)

4. Lös ekvationerna exakt

(a) $\ln(x+2) - \ln(2-x) = 3\ln 2$ (3p)

Lösning: Använder logaritmlagarna
$\ln(x+2) - \ln(2-x) = 3\ln 2 \iff \ln(\frac{x+2}{2-x}) = \ln 2^3 \underset{x \neq \pm 2}{\iff}$
$(\frac{x+2}{2-x}) = 2^3 \iff x+2 = 8(2-x) \iff 9x = 14 \iff x = \frac{14}{9}$

Svar: $x = \frac{14}{9}$
Poängsättning
Lämplig ansats, tex visat förståelse för ngn av logaritmlagarna (+1p)
Godtabar fortsättning, men ngn felräkning (+1p)
Korrekt svar (+1p)

(b) $4 \cdot 5^x = 3 \cdot 6^x$ (3p)

Lösning: Använder logaritmlagarna
$4 \cdot 5^x = 3 \cdot 6^x \iff \ln(4 \cdot 5^x) = \ln(3 \cdot 6^x) \iff \ln 4 + \ln 5^x = \ln 3 + \ln 6^x \iff \ln 6^x - \ln 5^x = \ln 4 - \ln 3 \iff x\ln 6 - x\ln 5 = \ln(\frac{4}{3}) \iff x(\ln 6 - \ln 5) = \ln(\frac{4}{3}) \iff x\ln(\frac{6}{5}) = \ln(\frac{4}{3}) \iff x = \frac{\ln(\frac{4}{3})}{\ln(\frac{6}{5})}$

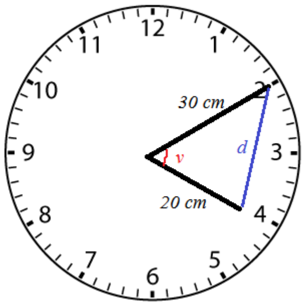
Alternativ: $4 \cdot 5^x = 3 \cdot 6^x \iff \frac{4}{3} = \frac{6^x}{5^x} \iff \frac{4}{3} = (\frac{6}{5})^x \iff \ln(\frac{4}{3}) = \ln(\frac{6}{5})^x \iff \ln(\frac{4}{3}) = x\ln(\frac{6}{5}) \iff x = \frac{\ln(\frac{4}{3})}{\ln(\frac{6}{5})} = \frac{\ln 4 - \ln 3}{\ln 6 - \ln 5}$

Svar: $x = \frac{\ln(\frac{4}{3})}{\ln(\frac{6}{5})} = \frac{\ln 4 - \ln 3}{\ln 6 - \ln 5}$
Poängsättning
Lämplig ansats, tex visat förståelse för ngn av logaritmlagarna (+1p)
Godtabar fortsättning, men ngn felräkning (+1p)
Korrekt svar (+1p)

5. Timvisaren på en klocka som hänger i en föreläsningssal är 20 cm och minutvisaren är 30 cm. Hur långt är det mellan spetsarna på visarna då klockan visar 16.10? (4p)

Lösning:

Vi kan anta att visarna tillsammans med avståndet mellan spetsarna bildar en triangel med sidorna 30 cm, 20 cm och det okända avståndet d. Vinkeln v mellan visarna kan vi tex få genom att beräkna hur många grader respektive visare vridit sig under 10 minuter, dvs från det att klockan var 16.00.



Då klockan är 16.10 antar vi att minutvisaren pekar exakt på 2, dvs på 10 minuter har minutvisaren rört sig $\frac{10}{60}$ varv $= 60°$. Dvs vinkeln från “12” till minutvisaren är 60°
Samtidigt har timvisaren rört sig $\frac{10}{60} \cdot \frac{1}{12}$ varv på 10 minuter, dvs 5°, från “4”, här utgår vi ifrån att timvisaren pekar exakt på 4 då klockan är 16.00. Så vinkeln från “12” till timvisaren är då $120° + 5° = 125°$
Detta ger oss nu att vinkeln mellan visarna blir $v = 65°$

Alternativ:
Approximering av vinkeln, dela upp varvet i 12 lika stora delar, dvs 5 minuter motsvarar vinkeln $\frac{360°}{12} = 30°$. Antar vi att minutvisaren pekar på 2 och timvisaren på 4 då klockan är 16.10, så motsvarar detta 10 min $\iff v = 60°$.

Nu kan vi använda cosinussatsen för att bestämma d.
$d^2 = 20^2 + 30^2 - 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot \cos 65°$
$\iff d = \sqrt{20^2 + 30^2 - 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot \cos 65°} \approx 28.2$ cm.
Alternativ: $d^2 = 20^2 + 30^2 - 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot \cos 60°$
$\iff d = \sqrt{20^2 + 30^2 - 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot \cos 60°} \approx 26.5$ cm.

Svar: Avståndet är 28.2 cm, alternativt 26.5 cm
Poängsättning
Godtagbar ansats, tex inse att cosinussatsen kan användas, eller rita figur och bestämma v approximativt (+1p)

Bestämt det mer exakta värdet av v (+1p)

Korrekt användning av cosinussatsen, men ngt beräkningsfel el dyl. (+1p)

Godtagbart svar (+1p)

6. (a) Bestäm konstanten k så att gränsvärdet $G = \lim_{x \to 4} \dfrac{2 - \sqrt{kx}}{4x^2 - x^3}$ existerar, och bestäm sedan G. (*Motivera väl*) (4p)

Lösning: Sätter man in $x = 4$ i nämnaren fås $4 \cdot 4^2 - 4^3 = 0$. För att ett gränsvärde då ska kunna existera måste vi ha ett uttryck på obestämd form, dvs $\frac{0}{0}$. Det innebär att k ska väljas så att $2 - \sqrt{kx} = 0 \iff$ $\iff 2 = \sqrt{kx} \iff k = 1$.
För att bestämma G, sätt $q(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{4x^2-x^3} \iff \frac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{x^2(4-x)(2+\sqrt{x})} \iff \frac{4-x}{x^2(4-x)(2+\sqrt{x})} \underset{x \neq 4}{\iff} \frac{1}{x^2(2+\sqrt{x})}$

Så $G = \lim_{x\to 4} q(x) \iff \lim_{x\to 4} \frac{1}{x^2(2+\sqrt{x})} = \frac{1}{4^2(2+\sqrt{4})} = \frac{1}{16\cdot 4} = \frac{1}{64}$

Svar: $k = 1$ och då är $G = \frac{1}{64}$

Poängsättning

Godtagbar ansats, tex inse att nämnaren är 0 och sätter täljaren = 0 (+1p)
Godtagbar motivering till varför täljaren också måste vara 0, samt bestämmer k=1 (+1p)
Godtagbar ansats till att bestämma G, t.ex. börjar förenkla uttryck (+1p)
Godtagbart bestämning av G (+1p)

(b) En funktion defineras enligt: $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + a & \text{om} \quad x < 1 \\ 5 + x - x^2 & \text{om} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ b(x-2) + 3 & \text{om} \quad x > 2 \end{cases}$

där a och b är konstanter.

Bestäm a och b så att funktionen blir kontinuerlig. (*Motivera väl*) (4p)

Lösning: $f(x)$ defineras som polynom i alla tre intervall för x. Polynom är kontinuerliga funktioner så vi vet att $f(x)$ är kontinuerlig för $x < 1$, för $1 < x < 2$, samt för $x > 2$. Kvar är att undersöka kontinuitet i punkterna $x = 1$ och $x = 2$.

För att $f(x)$ ska vara kontinuerlig i en punkt ska vänster- och högergränsvärden av $f(x)$ i punkten vara lika och dessutom samma som funktionsvärdet i punkten, dvs. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

För kontinuitet i $x = 1$:

$\lim_{x\to 1^-} (x^2 + x + a) = 2 + a$

$\lim_{x\to 1^+} (5 + x - x^2) = 5 = f(1)$

$\implies 2 + a = 5 \iff a = 3.$

På samma sätt, för kontinuitet i $x = 2$

$\lim_{x\to 2^-} (5 + x - x^2) = 3 = f(2)$

$\lim_{x\to 2^+} (b(x-2) + 3) = 3$

Här ser vi att vänster- och högergränsvärdena av $f(x)$ i $x = 2$ båda är 3, så kontinuitet föreligger för varje värde på b.

Svar: $a = 3$, b godtycklig konstant.

Poängsättning

Godtagbar ansats, beräkna något av vänster- eller högergränsvärdena (+1p)
Motivering: "lika gränsvärden -> kontinuitet" (+1p)
Godtagbar bestämning av a (+1p)
Godtagbart bestämning av b (+1p)

7. Formulera och bevisa Sinussatsen. (4p)

Lösning: Se avsnitt 3.3
Poängsättning
Godtagbar formulering av Sinussatsen (+1p)
Godtagbar ansats av bevis, tex använda areasatsen för två av vinklarna, eller dra en höjd i en triangel och använda trig.relationer för rätv. trianglar (+1p)
Godtagbar fortsättning, tex areasatsen för alla tre vinklar och början till förenkling eller båda fallen då höjd dras och samband för sinus i rätv. triangel utnyttjas (+1p)
Logiskt och fullständigt bevis (+1p)

8. Bevisa att

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(6p)

Lösning: Se avsnitt 5.3
Poängsättning
Godtagbar ansats av bevis, tex visa vilka areor i enhetscirkeln man vill jämföra (+1p)

Lämplig fortsättning, tex korrekta uttryck för areorna, ställt upp olikheten (+1p)

Godtagbart logiskt resonemang att olikheten gäller i första kvadranten (+1p)

Godtagbar motivering till att olikheten även gäller vinklar i fjärde kvadranten (+1p)

Visar likheten med vissa luckor, tex saknar hänvisning till instängningsregeln (+1p)

Fullständigt och logiskt tydligt bevis (+1p)

Lycka till!

TRIGONOMETRISKA FORMLER

Additions- och subtraktionsformlerna

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

Formler för dubbla vinkeln

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

Omskrivning till amplitud-fasvinkelform

$a\cos v + b\sin v = c\sin(v + \phi)$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\phi = \arctan(\frac{a}{b})$, om $b > 0$

$\phi = \arctan(\frac{a}{b}) + \pi$, om $b < 0$