Tentamen i Matematik, del B, för Tekniskt basår

Kurskod: MVE425 B
Telefonvakt: tel.
Datum: 19 februari 2016
Tid för tentamen: 14.00 - 18.00
Hjälpmedel: Inga
Betygsgränser: Betyg 3: 20 - 31, Betyg 4: 32 - 41, Betyg 5: 42 - 50

"My [algebraic] methods are really methods of working and thinking; this is why they have crept in everywhere anonymously."

(Emmy Noether, 1882 - 1935)

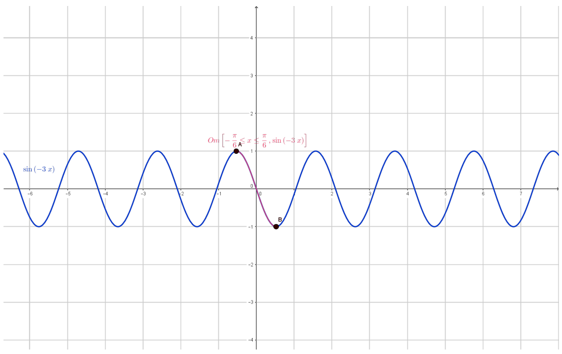
1. Avgör om följande funktioner är inverterbara.

   Om funktionen är inverterbar, bestäm då också inversen till funktionen tillsammans med definitions- och värdemängd till den inversa funktionen.

   Om funktionen inte är inverterbar, bestäm restriktionen av funktionen så att denna restriktion blir inverterbar.

   (a) $f(x) = \sin(-3x),\ \ D_f = (-\infty, \infty),\ V_f = [-1, 1]$ (3p)

   Lösning: För att en funtkion ska vara inverterbar ska den vara bijektiv, det innebär både injektiv, dvs alla pkt i definitionsmängden avbildas på olika pkt i värdemängden, samt surjektiv, dvs värdemängden är hela "avbildningsmängden".
   $\sin(-3x)$ är surjektiv men inte injektiv, alltså inte inverterbar. Genom att betrakta en restriktion av f, $f_{res} = \sin(-3x), D_f = [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$, $V_f = [-1, 1]$ fås en inverterbar funktion.



Svar: Inte inverterbar funktion, restriktionen $f_{res} = \sin(-3x), D_f = [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$, $V_f = [-1, 1]$ är inverterbar.

Poängsättning

Godtagbar motivering för att komma fram till att funktionen inte är inverterbar (+1p)

Godtabar bestämning av restriktionen av funktionen (+2p)

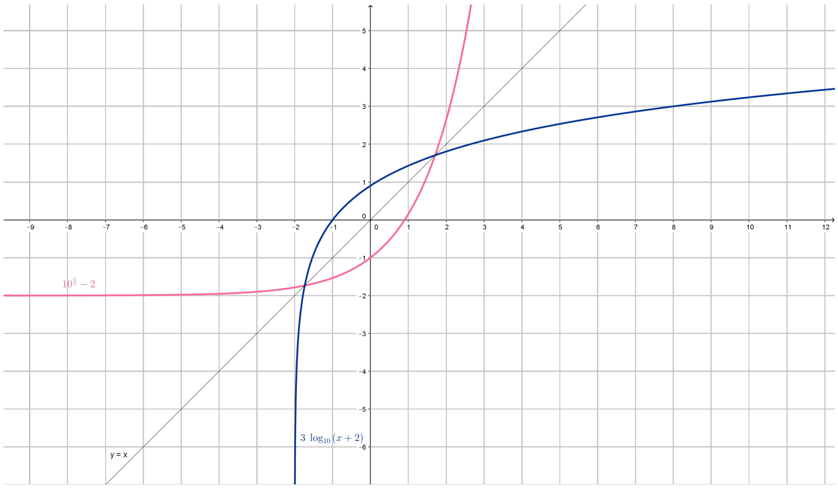
(b) $f(x) = 10^{(x/3)} - 2, \;\; D_f = (-\infty, \infty), V_f = (-2, \infty)$ (3p)

Lösning: Enl samma som ovan, funktionen ska vara bijektiv för att vara inverterbar dvs både injektiv och surjektiv.

Detta stämmer för $f(x) = 10^{x/3} - 2$ med $D_f = (-\infty, \infty)$ och $V_f = (-2, \infty)$, eftersom fkt 10^x antar olika y-värden för olika värden på x och funktionen kommer anta alla värden i värdemängden.

Den inversa funktionen till $f(x)$ är $f_{inv} = 3\log_{10}(x + 2)$, fås gnm att "lösa ut x ur $y = f(x)$ och byta y mot x".

Definitionsmängden till inversa fkt är värdemängden till f och värdemängden till inv fkt är def.mängd till f , så att $D_{f_{inv}} = (-2, \infty)$ och $V_{f_{inv}} = (-\infty, \infty)$.



Svar: Inverterbar funktion med inversen $f_{inv} = 3\log_{10}(x+2)$, $D_{f_{inv}} = (-2, \infty)$ och $V_{f_{inv}} = (-\infty, \infty)$.

Poängsättning

Godtagbar motivering för att komma fram till att funktionen är inverterbar (+1p)

Korrekt uttryck för invers funktion (+1p)

med korrekt definitions- och värdemängd. (+1p)

2. Lös ekvationerna exakt

(a) $\lg(10^{x+2} - 100) = x + 1$ (3p)

Lösning: Använder logaritm- och potenslagar

$\lg(10^{x+2} - 100) = x + 1 \iff 10^{\lg(10^{x+2}-100)} = 10^{x+1} \iff$

$10^{x+2} - 100 = 10^{x+1} \iff 10^x \cdot 10^2 - 10^2 = 10^x \cdot 10 \iff$

$10^x \cdot 10^2 - 10^x \cdot 10 = 10^2 \iff 10^x(10^2 - 10^1) = 10^2 \iff$

$10^x(100 - 10) = 100 \iff 10^x = \frac{100}{90} \iff$

$x = \lg(\frac{10}{9}) = \lg(10) - \lg 9 = 1 - \lg 9$

Svar: $x = \lg(\frac{10}{9}) = 1 - \lg 9$

Poängsättning

Lämplig ansats, tex visat förståelse för ngn av logaritmlagarna (+1p)

Godtabar fortsättning, men ngn felräkning (+1p)

Korrekt svar (+1p)

(b) $\ln(x^3 - 1) = \ln(x - 1) + \ln 7$ (4p)

Lösning: Använder logaritmlagar

$\ln(x^3 - 1) = \ln(x - 1) + \ln 7 \iff \ln[(x - 1)(x^2 + x + 1)] = \ln(x - 1) + \ln 7 \iff \ln(x^2 + x + 1) = \ln 7 \iff x^2 + x + 1 = 7 \iff x^2 + x - 6 = 0 \iff x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} \iff x = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \implies x = 2$ eller $x = -3$.

Här ser vi att $x = -3$ är en falsk rot, ty då skulle t.ex. HL bli $\ln((-3)^3 - 1) \iff \ln(-28)$ och logartimfunktionen är inte definerad för $x \leq 0$.

Svar: $x = 2$

Poängsättning

Lämplig ansats, tex visat förståelse för logaritmlagarna (+1p)

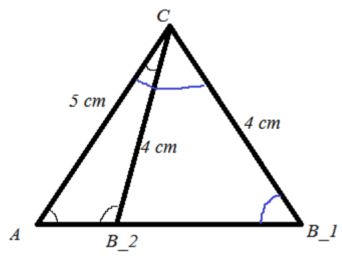
Godtabar fortsättning, tex börjat förenkla uttryck (+1p)

Godtagbar 2a-gradsekv (+1p)

Godtagbart svar (+1p)

3. I en triangel ABC är $BC = 4$ cm och $AC = 5$ cm. Vinkeln $A = 50°$. Rita en figur och beräkna sedan vinklarna B och C. (5p)

Lösning:



Enligt sinussatsen $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \iff B = \arcsin(\frac{b \sin A}{a}) = \arcsin(\frac{5 \cdot \sin 50^\circ}{4}) \approx 73,2^\circ \implies C = 180^\circ - 50^\circ - 73,2^\circ = 56,8^\circ$.

eller $B = 180^\circ - 73,2^\circ = 106,9^\circ \implies C = 180^\circ - 50^\circ - 106,9^\circ = 23,2^\circ$.

Svar: $B = 73,2^\circ, C = 56,8^\circ$ eller $B = 106,9^\circ, C = 23,2^\circ$

Poängsättning

Godtagbar ansats, tex ritat figur och markerat givna värden (+1p)

Godtabar fortsättning, tex ställt upp sinussatsen för att beräkna vinkel B (+1p)

Beräkna en av vinklarna B rätt (+1p)

Beräkna en uppsättning av vinklarna B och C rätt (+1p)

Godtagbart svar av båda uppsättningarna av B och C (+1p)

4. Lös ekvationen $z^2 - 8iz + 2i = 16$ (*Svara på $x + iy$ form*) (5p)

Lösning: Börja med flytta -2i till HL, då har vi bara termer med z kvar i VL. Kvadratkomplettera sedan map z, så att $z^2 - 8iz + 2i = 16 \iff z^2 - 8iz + (4i)^2 = 16 + 2i + (4i)^2 \iff (z - 4i)^2 = -2i$

Sätt nu $z - 4i = w$ och lös $w^2 = -2i$

Låt $w = x + iy \implies w^2 = 2i \iff (x + iy)^2 = -2i \iff x^2 - y^2 + i2xy = -2i$

Sätt nu imaginärdelar och realdelar lika

$$\implies \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -2 \iff x = -\frac{1}{y} \end{cases}$$

$$\implies (-\tfrac{1}{y})^2 - y^2 = 0 \iff y^4 = 1 \iff y = \pm 1 \implies x = \mp 1$$

Detta ger oss $w = \pm(-1 + i)$, vilket ger $z = -1 + i + 4i = -1 + 5i$, eller $z = 1 - i + 4i = 1 + 3i$

Svar: $z = -1 + 5i$ eller $z = 1 + 3i$

Poängsättning

Godtagbar ansats av lösning, tex börjar kvadratkompletera (+1p)

Godtagbar första substitution (+1p)

Godtagbart ekvationssystem, re-och im-delar (+1p)

Löser ekvationssystem och börjar substituera tbk (+1p)

Godtagbart svar av båda lösningarna (+1p)

5. Bestäm samtliga lösningar med exakta värden till ekvationerna

   (a) $2\tan(3v - \frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (*Svara i radianer*) (3p)

   Lösning:

$2\tan(3v - \frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\sqrt{3}} \iff \tan(3v - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff$
$\iff 3v - \frac{\pi}{2} = \arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) + n \cdot \pi, n \in \mathbf{Z} \iff$
$\iff 3v - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi \iff 3v = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \iff$
$\iff 3v = \frac{2\pi}{3} + n \cdot \pi \iff v = \frac{2\pi}{9} + n \cdot \frac{\pi}{3}$

Svar: $v = \frac{2\pi}{9} + n \cdot \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

Poängsättning
Godtagbar ansats av lösning, tex arctan av "rätt värde" + korrekt period (+1p)
Rimlig, men ej fullständig lösning, tex vinkel rätt men fel period (+1p)
Korrekt lösning (+1p)

(b) $\sin v - \sqrt{3}\cos v = 1$ (*Svara i grader*) (4p)

Lösning:
$\sin v - \sqrt{3}\cos v = 1$
använd omskrivningen till "amplitud-fasvinkelform", då fås att
$\mathrm{VL} = \sin v - \sqrt{3}\cos v = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} \cdot \sin(v + \arctan(\frac{-\sqrt{3}}{1})) =$
$= 2\sin(v - 60°)$
$\implies \sin v - \sqrt{3}\cos v = 1 \iff 2\sin(v - 60°) = 1 \iff$
$$\iff v - 60° = \begin{cases} \arcsin(\frac{1}{2}) + n \cdot 360° \\ 180° - \arcsin(\frac{1}{2}) + n \cdot 360° \end{cases}, n \in \mathbf{Z}$$
$\implies v - 60° = 30° + n \cdot 360° \iff v = 90° + n \cdot 360°$
eller
$\implies v - 60° = 180° - 30° + n \cdot 360° \iff v = 210° + n \cdot 360°$

Svar: $v = \begin{cases} 90° + n \cdot 360° \\ 210° + n \cdot 360° \end{cases}, n \in \mathbf{Z}$

Poängsättning
Godtagbar ansats av lösning, tex påbörjat omskrivning på amplitud-fasvinkelform (+1p)
Påbörjat lösning av sinusekvation (+1p)
Godtagbar lösning av båda vinklarna men fel period, eller en vinkel med rätt period (+1p)
Godtagbart svar av båda vinklar (+1p)

6. (a) Beräkna $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x}{\sin 5x}$ (4p)

Lösning: Sätter vi $x = 0$ i uttrycket så får vi $\frac{0}{0}$, vilket är ett obestämt uttryck så gränsvärde kan existera. Vi börjar med att skriva om uttrycket med målet att kunna använda standardgränsvärdet $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin v}{v} = 1$

$\frac{\tan 3x}{\sin 5x} = \frac{\frac{\sin 3x}{\cos 5x}}{\sin 5x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x \cdot \sin 5x} \overset{\{\text{förläng med } 3x \text{ och} 5x\}}{=} \frac{3x \cdot 5x \cdot \sin 3x}{3x \cdot 5x \cdot \cos 3x \cdot \sin 5x} =$

$= \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{1}{\cos 3x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{3}{5}$

Sätt nu $t = 3x \implies x \to 0 \iff t \to 0$,
då får vi $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

Sätt $u = 5x \implies x \to 0 \iff u \to 0$,
då får vi $\lim_{x\to 0} \frac{5x}{\sin 5x} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{\sin u} \underset{\{\text{förläng med } \frac{1}{u}\}}{=}$

$= \lim_{u\to 0} \frac{\frac{u}{u}}{\frac{\sin u}{u}} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{\frac{\sin u}{u}} = \frac{1}{1} = 1$

Alltså får vi $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{1}{\cos 3x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{3}{5} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$

Svar: $\frac{3}{5}$

Poängsättning

Godtagbar ansats av lösning, tex omskrivning av tangens (+1p)

Godtagbar förenkling av uttryck (+1p)

Använder standardgränsvärdet, men ej fullständigt (+1p)

Godtagbart svar av gränsvärdet (+1p)

Obs! För full poäng behövs INTE $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$ och $\lim_{x\to 0} \frac{5x}{\sin 5x} = 1$ motiveras annat än som standardgränsvärde.

(b) Undersök om funktionen $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2 & \text{om} \quad x < 1 \\ 5x^3 - x^2 & \text{om} \quad x \geq 1 \end{cases}$ är kontinuerlig i punkten $x = 1$. (*Motivera väl*) (3p)

Lösning:
För att kontinuitet i $x = 1$ ska gälla måste $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$, så vi beräknar vänster- och högergränsvärde och ser om de är lika, och samma som $f(1)$.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 + x + 2 = 1 + 1 + 2 = 4$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 5x^3 - x^2 = 5 - 1 = 4 = f(1)$

Vi får att vänster- och högergränsvärdet för $f(x)$ i $x = 1$ är lika, och samma som $f(1) \implies f(x)$ är kontinuerlig i $x = 1$.

Svar: $f(x)$ är kontinuerlig i $x = 1$.

Poängsättning

Godtagbar ansats, tex påbörjar beräkning av ett av gränsvärdena (+1p)

Godtagbar beräkning av ett gränsvärde, påbörjat andra beräkningen (+1p)

Godtagbart motivering att f(x) är kontinuerlig (+1p)

7. Ange ett fjärdegradspolynom $p(z)$ med reella koefficienter som har nollställena $z = 2 - i$ och $z = i$. (*Motivera väl*) (4p)

Lösning: Vi vet att $p(z) = 0$ har lösningarna $z_1 = 2 - i$ och $z_3 = i$. Enligt satsen om komplexkonjugerade rötter kommer då också $z_2 = \bar{z}_1 = 2 + i$ och $z_4 = \bar{z}_3 = -i$ vara lösningar till $p(z) = 0$.

Vidare har vi från satsen om faktoruppdelning att
$p(z) = a_4(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4), a_4 \in \mathbf{R}$
Välj t.ex. $a_4 = 1$
$\underset{\text{enl. ovan}}{\Longrightarrow} p(z) = (z-(2-i))(z-(2+i))(z-i)(z+i) = ((z-2)^2-i^2)(z^2-i^2) = (z^2 - 4z + 5)(z^2 + 1) = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 5$

Svar: $p(z) = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 5$

Poängsättning

Godtagbar ansats tex ange komplexkonjugaten till lösningarna (+1p)

Godtagbar fortsättning, tex ställer upp produkt av faktorer (+1p)

Godtagbar delförenkling av uttryck (+1p)

Godtagbar motivering enl. de två satserna (+1p)

Godtagbart svar av p(z) (+1p)

8. Formulera och bevisa areasatsen. (5p)

Lösning: Se avsnitt 3.2

Poängsättning

Godtagbar formulering av satsen (+1p)

Lämplig ansats till bevis för det ena av fallen (+1p)

Godtagbart bevis av det ena fallet (+1p)

Godtagbart bevis av det ena fallet och påbörjat bevis av det andra fallet (+1p)

Godtagbart bevis av båda fallen (+1p)

9. Formulera och bevisa Eulers formler. (4p)

Lösning: Se avsnitt 4.7

Poängsättning

Godtagbar formulering av båda formlerna (+1p)

Visar tex hur def av e^{iv} används (+1p)

Godtagbart bevis av den ena av formlerna (+1p)

Godtagbart bevis av båda formlerna (+1p)

Lycka till!

TRIGONOMETRISKA FORMLER

Additions- och subtraktionsformlerna

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

Formler för dubbla vinkeln

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

Omskrivning till amplitud-fasvinkelform

$a\cos v + b\sin v = c\sin(v + \phi)$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\phi = \arctan(\frac{a}{b})$, om $b > 0$

$\phi = \arctan(\frac{a}{b}) + \pi$, om $b < 0$