Tentamen i Matematik, del B, för Tekniskt basår

Kurskod: MVE425 B
Telefonvakt: tel.
Datum: 24 augusti 2016
Tid för tentamen: 14.00 - 18.00
Hjälpmedel: Inga
Betygsgränser: Betyg 3: 20 - 31, Betyg 4: 32 - 41, Betyg 5: 42 - 50

"Certainly my troops must consist of numbers, or they can have no existence at all."

(Ada Lovelace, 1815 - 1852)

1. Det radioaktiva ämnet cesium-137 sönderfaller till barium samtidigt som en elektron skickas ut. Cesium-137 har halveringstiden 30 år, dvs. efter 30 år finns hälften så mycket kvar av den mängd som fanns då tidräkningen börjar. Det radioaktiva sönderfallet sker exponentiellt, $y = C \cdot a^x$. Vid kärnkraftsolyckan i Tjernobyl i maj 1986 föll ca 0.47 kg cesium-137 ner över Sverige. Hur mycket av detta cesium kan beräknas finnas kvar i maj 2017? (5p)

   Lösning: Använd den exponentiella modellen $y = C \cdot a^x$, där y är mängd cesium vid tiden x, $C = 0.47$ är startmängd vid tiden $x = 0$. För att bestämma a utnyttjar vi halveringstiden 30 år, dvs efter 30 år är $y = 0.5 \cdot C \implies 0.5 = a^{30} \iff a = 0.5^{1/30}$
   Sätt in detta i modellen, då fås $y = 0.47 \cdot (0.5^{(1/30)})^x = 0.47 \cdot 0.5^{(x/30)}$
   Från maj 1986 till maj 2017 är det 31 år $\implies y = 0.47 \cdot 0.5^{(31/30)} \approx 0.22$ kg

   Svar: I maj 2017 finns det kvar ca 200 g cesium-137.

   Poängsättning

   Godtabar ansats, tex satt upp modell med godtagbart värde på C (+1p)

   Relevant fortsättning, tex visat hur a kan beräknas mha halveringstid (+1p)

   Godtagbar beräkning av a (+1p)

   Använder modellen för beräkning av mängd vid år 2017 (+1p)

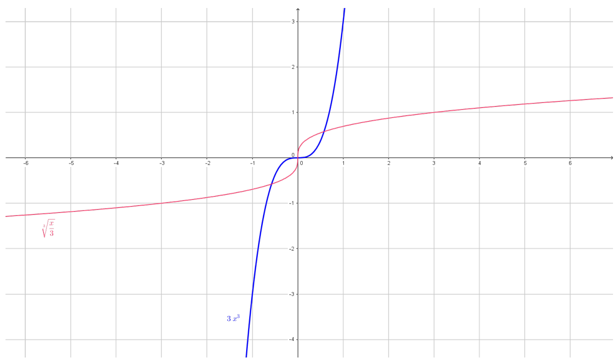
   Godtagbart svar av mängden (+1p)

2. Avgör om funktionen $f(x) = 3x^3$ är inverterbar.
Om funktionen är inverterbara, bestäm då också inversen till funktionen tillsammans med definitions- och värdemängd till den inversa funktionen.
Om funktionen inte är inverterbar, bestäm restriktionen av funktionen så att denna restriktion blir inverterbar. (3p)

Lösning: För att en funtkion ska vara inverterbar ska den vara bijektiv, det innebär både injektiv, dvs alla pkt i definitionsmängden avbildas på olika pkt i värdemängden, samt surjektiv, dvs värdemängden är hela "avbildningsmängden".
Detta stämmer för $f(x) = 3x^3, D_f = (-\infty, \infty)$, $V_f = (-\infty, \infty)$, eftersom fkt x^3 antar olika y-värden för olika värden på x och funktionen kommer anta alla värden i värdemängden.

Den inversa funktionen till $f(x)$ är $f_{inv} = (\frac{x}{3})^{1/3}$, fås gnm att "lösa ut x ur $f(x)$ och byta y mot x".

Definitionsmängden till inversa fkt är värdemängden till f och värdemängden till inv fkt är def.mängd till f , så att $D_{f_{inv}} = (-\infty, \infty)$ och $V_{f_{inv}} = (-\infty, \infty)$.

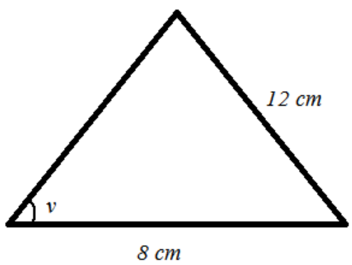


Svar: Inverterbar funktion med inversen $f_{inv} = (\frac{x}{3})^{1/3}$, $D_{f_{inv}} = (-\infty, \infty)$ och $V_{f_{inv}} = (-\infty, \infty)$.

Poängsättning

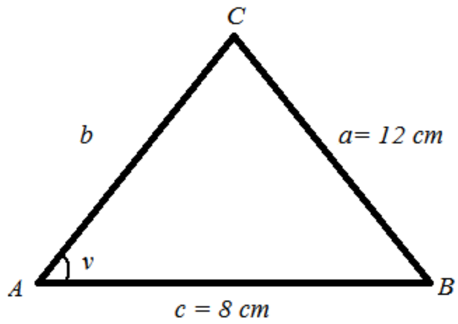
Godtagbar motivering till att funktionen är inverterbar (+1p)
Korrekt uttryck för invers funktion (+1p)
med korrekt definitions- och värdemängd. (+1p)

3. Beräkna arean av följande triangel med vinkel $v = 61°$ (5p)



Lösning:

Detta kan t.ex. göras med hjälp av areasatsen. Då behöver vi veta mellanliggande vinkel till de kända sidorna. Denna vinkel kan t.ex. bestämmas med hjälp av sinussatsen. Vi inför följande beteckningar



och får då enligt sinussatsen $\frac{\sin C}{8} = \frac{\sin A}{12} \iff C = \arcsin(\frac{8 \cdot \sin 61°}{12}) \approx 35,7° \implies B = 180° - 61° - 35,7° = 83,3°$

Här vet vi att $C < A$ eftersom $c < a$, dvs bara en lösning för C (och B). Kan också se att vi annars skulle få $C = 180° - 35,7° = 144,3° \implies B = 180° - 61° - 144,3° = -25,3°$!

Nu kan vi använda areasatsen $T = \frac{ac \sin B}{2} = \frac{8 \cdot 12 \sin 83,3°}{2} \approx 47,7$ a.e.

Svar:

47,7 a.e

Poängsättning

Godtagbar ansats av lösning, tex ställt upp sinussatsen eller areasatsen (+1p)

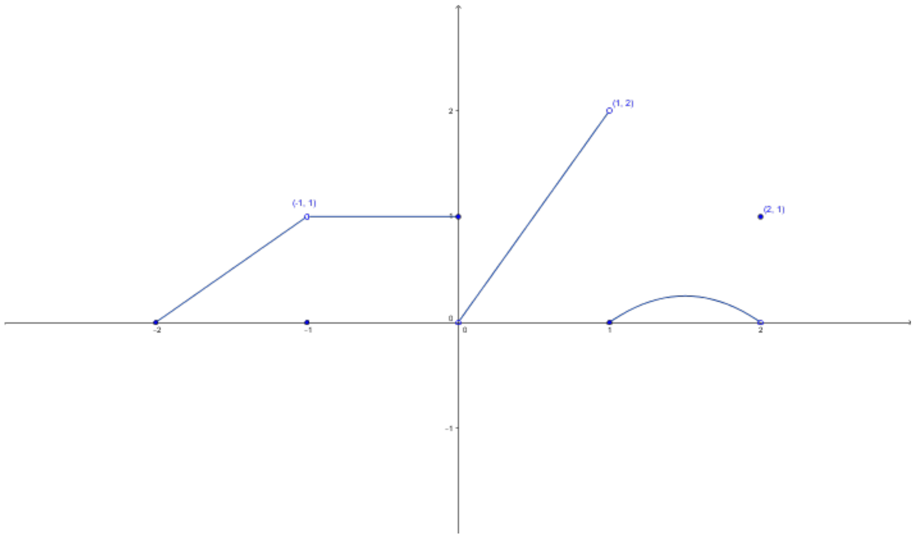
Godtagbar beräkning av vinkel C (+1p)

Godtagbar beräkning av vinkel B (+1p)

Använt areasatsen på godtagbart sätt (även om B och C är fel) (+1p)

Godtagbar beräkning av arean (+1p)

4. Funktionen $f(x)$ är definerad på $[-2, 2]$ och har grafen som illustrerar i figuren nedan.



Avgör om $f(x)$ är kontinuerlig, vänsterkontinuerlig, högerkontinuerlig och diskontinuerlig i var och en av punkterna $x=-2, x=-1, x=0, x=1$ och $x=2$. (*Motivera ditt svar*) (5p)

Lösning:

Vi betraktar var punkt för sig

$x=-2$: Här är $f(x)$ högerkontinuerlig i pkt (-2, 0) eftersom vi i grafen ser att $y \to 0$ då $x \to$, dvs $\lim_{x\to-2^+} f(x) = 0 = f(-2)$. Eftersom $x=-2$ är en sluten ändpkt till D_f är $f(x)$ också kontinuerlig i $x=-2$.

$x=-1$: Här gör grafen ett "språng", dvs $\lim_{x\to-1} f(x) = 1 \neq f(-1) = 0 \implies f(x)$ diskontinuerlig i $x=-1$.

$x=0$: Här har vi $\lim_{x\to0^-} f(x) = 1 = f(0) \implies f(x)$ är vänsterkontinuerlig i $x=0$, men $\lim_{x\to0^+} f(x) = 0 \neq f(0) \implies f(x)$ är inte högerkontinuerlig i $x=0$ och då inte heller kontinuerlig, dvs diskontinuerlig.

$x=1$: Här har vi $\lim_{x\to1^-} f(x) = 2 \neq f(1) = 0 \implies f(x)$ är inte vänsterkontinuerlig i $x=0$, $\lim_{x\to1^+} f(x) = 0 = f(1) \implies f(x)$ är högerkontinuerlig i $x=0$. Eftersom vänstergränsvärdet $\neq$ högergränsvärdet så är $f(x)$ även diskontinuerlig i $x=1$.

$x=2$: Återigen sluten ändpkt i D_f. Denna gång endast intressant att betrakta vänstergränsvärdet, $\lim_{x\to2^-} f(x) = 0 \neq f(2) = 1 \implies f(x)$ är inte vänsterkontinuerlig i $x=0$, och då även diskontinuerlig.

Svar: $x=-2$: högerkontinuerlig och kontinuerlig; $x=-1$: diskontinuerlig; $x=0$: vänsterkontinuerlig, diskontinuerlig; $x=1$: högerkontinuerlig, diskontinuerlig; $x=2$: diskontinuerlig.

Poängsättning

Godtagbar bestämning av kontinuitet i en av punkterna (+1p)

Godtagbar bestämning av kontinuitet i två av punkterna eller delar av tre punkter (+1p)

Godtagbar bestämning av kontinuitet i tre av punkterna eller delar av fyra punkter (+1p)

Godtagbar bestämning av kontinuitet i fyra av punkterna eller delar av fem punkter (+1p)

Godtagbar bestämning av kontinuitet i alla fem punkter (+1p)

5. Lös följande ekvationer exakt

(a) $3\ln x - \ln 18 = 3$ (3p)

Lösning: Använder logaritmlagarna

$3\ln x - \ln 27 = 3 \iff \ln x^3 - \ln 27 = 3 \iff \ln(\frac{x^3}{27}) = 3 \iff e^{\ln(\frac{x^3}{27})} = e^3 \iff \frac{x^3}{27} = e^3 \iff x^3 = 27e^3 \iff x = (27e^3)^{1/3} \iff x = 9e$

Svar: $x = 9e$

Poängsättning

Lämplig ansats, tex visat förståelse för ngn av logaritmlagarna (+1p)

Godtabar fortsättning, men ngn felräkning (+1p)

Korrekt svar (+1p)

(b) $\sin(2x + 10°) = \frac{1}{2}$ *(Svara i grader)* (3p)

Lösning:

$\sin(2x + 10°) = \frac{1}{2} \iff 2x + 10° = \arcsin(\frac{1}{2}) + n \cdot 360°, n \in \mathbf{Z}$

eller $2x + 10° = \pi - \arcsin(\frac{1}{2}) + n \cdot 360°, n \in \mathbf{Z}$

$\implies 2x + 10° = 30° + n \cdot 360°, \iff 2x = 20° + n \cdot 360° \iff v = 10° + n \cdot 180°, n \in \mathbf{Z}$

eller

$\implies 2x + 10° = 150° + n \cdot 360°, \iff 2x = 140° + n \cdot 360° \iff v = 70° + n \cdot 180°, n \in \mathbf{Z}$

Svar: $v = \begin{cases} 10° + n \cdot 180° \\ 70° + n \cdot 180° \end{cases}, n \in \mathbf{Z}$

Poängsättning

Godtagbar ansats av lösning, tex satt upp uttryck för båda lösningar (+1p)

Rimlig, men ej fullständig lösning, tex vinkel rätt för båda lösningar men glömt period, eller bara ena lösning korrekt (+1p)

Korrekt lösning (+1p)

(c) $2\tan 3x = \frac{6}{\sqrt{3}}$ (*Svara i radianer*) (3p)

Lösning: $2\tan 3x = \frac{6}{\sqrt{3}} \iff \tan 3x = \frac{3}{\sqrt{3}} \iff \tan 3x = \sqrt{3} \iff 3x = \arctan(\sqrt{3}) + n\cdot\pi, n \in \mathbf{Z} \iff 3x = \frac{\pi}{3} + n\cdot\pi \iff x = \frac{\pi}{9} + n\cdot\frac{\pi}{3}$

Svar: $x = \frac{\pi}{9} + n\cdot\frac{\pi}{3}$

Poängsättning

Godtagbar ansats av lösning, tex satt upp uttryck för lösning inkl period (+1p)

Rimlig, men ej fullständig lösning, tex vinkel rätt men fel period (+1p)

Korrekt lösning (+1p)

(d) $z - 3iz - 2 - i = 0$ (*Svara på formen* $z = x + iy$) (3p)

Lösning: $z-3iz-2-i = 0 \iff z(1-3i) = 2+i \iff z = \frac{2+i}{1-3i} \iff z = \frac{(2+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} \iff z = \frac{2+7i+3i^2}{1-9i^2} \iff z = \frac{-1+7i}{10} = -\frac{1}{10} + i\frac{7}{10}$

Svar: $z = \frac{-1+7i}{10} = -\frac{1}{10} + i\frac{7}{10}$

Poängsättning

Godtagbar ansats av lösning, tex börja lösa ut z (+1p)

Rimlig, men ej korrekt lösning (+1p)

Korrekt lösning (+1p)

(e) $z^4 + 1 = 0$ (*Svara på formen* $z = x + iy$) (5p)

Lösning: Sätt $p(z) = z^4+1$, $p(z)$ har då reella koefficienter, från satsen om komplexkonjugerade rötter vet vi då att om z_1 är en rot så är också $z_2 = \bar{z_1}$ en rot och p.s.s. om z_3 är en rot så är också $z_4 = \bar{z_3}$ en rot.

Från satsen om faktoruppdelning vet vi då att
$p(z) = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$.

Vi sätter $z_1 = x+iy \implies z_2 = x-iy$ och $z_3 = a+ib \implies z_4 = a-ib$.

Då får vi $p(z) = (z-(x+iy))(z-(x-iy))(z-(a+ib))(z-(a-ib)) = ((z-x)^2-(iy)^2)((z-a)^2-(ib)^2) = (z^2-2xz+(x^2+y^2))(z^2-2az+(a^2+b^2))$

Sätt nu $a^2+b^2 = k$ och $x^2+y^2 = m \implies$
$p(z) = z^4 - 2az^3 + kz^2 - 2xz^3 + 4axz^2 - 2xkz + mz^2 - 2amz + km = z^4 - 2(a+x)z^3 + (4ax+m+k)z^2 - 2(xk+am)z + km$

Nu identifierar vi lika koefficienter i de två olika uttrycken för $p(z)$

$a_4 : 1 = 1$

$a_3 : -2(a+x) = 0 \implies x = -a$

$a_2 : 4ax + m + k = 0$

$a_1 : 2(xk+am) = 0 \implies xk = -am \underset{\text{från} a_3}{\implies} -ak = -am \iff k = m$

$a_0 : mk = 1 \underset{\text{från} a_1}{\implies} m^2 = 1 \iff m = \pm 1 \underset{\text{enl.} a_1}{\implies} k = \pm 1$

Men enligt våra antaganden ovan är $m = x^2 + y^2$ och $k = a^2 + b^2$ och $x, y, a, b \in \mathbf{R} \implies m \neq -1, k \neq -1$
Så vi har alltså $m = x^2 + y^2 = 1$ och $k = a^2 + b^2 = 1$ Använd detta i a_2 tillsammans med villkoret från $a_3 \implies -4a^2 + 2 = 0 \iff$
$\iff a = \frac{1}{\sqrt{2}} \underset{\text{enl.}a_3}{\implies} x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\underset{\text{enl.}ovan}{\implies} (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + b^2 = 1 \iff b^2 = \frac{1}{2} \iff y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
och
$\underset{\text{enl.}ovan}{\implies} (-\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + y^2 = 1 \iff y^2 = \frac{1}{2} \iff y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$
Så vi får rötterna $z_{1,2} = \frac{-1\pm i}{\sqrt{2}}$ och $z_{3,4} = \frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$

Svar:
$z_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i}{\sqrt{2}}, z_{3,4} = \dfrac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$

Poängsättning

Godtagbar ansats, tex anger att komplexkonjugat är lösning (+1p)

Godtagbar fortsättning, tex utnyttjar "faktoruppdelning" (+1p)

Förenklar uttryck (+1p)

Identifierar koefficienter (+1p)

Godtagbart svar points+1

6. Bestäm värden på konstanten a så att gränsvärdet $G = \lim_{x\to 1} \dfrac{6x^2 - ax - a^2}{x - 1}$ existerar. Beräkna sedan G för dessa värden på a. (6p)

Lösning:

Om vi sätter $x = 1$ i nämnaren i gränsvärdet ovan får vi $1 - 1 = 0$. För att G ska kunna existera måste även täljaren vara 0 då $x = 1$,
dvs $6 \cdot 1^2 - a \cdot 1 - a^2 = 0 \iff a^2 + a - 6 = 0 \iff a = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \implies a = 2$ eller $a = -3$

$a = 2 \implies G = \lim_{x\to 1} \dfrac{6x^2 - 2x - 4}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(6x+4)}{x-1} = \lim_{x\to 1} 6x + 4 = 6 + 4 = 10$

$a = -3 \implies G = \lim_{x\to 1} \dfrac{6x^2 + 3x - 9}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(6x+9)}{x-1} = \lim_{x\to 1} 6x + 9 = 6 + 9 = 15$

Svar: $a = 2 \implies G = 10$ och $a = -3 \implies G = 15$

Poängsättning

Godtagbar ansats, tex satt täljare = 0 (+1p)

Bestämmer ett värde för a (+1p)

Bestämmer båda värden för a (+1p)

Påbörjar godtagbar beräkning av gränsvärde (+1p)

Bestämmer ett motsvarande värde för G (+1p)

Bestämmer båda motsvarande värde för G (+1p)

7. Visa att $2\cos^2 2x = 1 + \cos 4x$ (4p)

Lösning: Använd dubbla vinkeln för cosinus och trig.ettan
HL $= 1 + \cos 4x = 1 + \cos(2x + 2x) = 1 + \cos^2 2x - \sin^2 2x = 1 + \cos^2 2x - (1 - \cos^2 2x) = 2\cos^2 2x =$ VL vsv.

Poängsättning

Godtagbar ansats, en påbörjad omskrivning av VL eller HL (+1p)

Godtagbar användning av dubbla vinkeln (+1p)

Godtagbar anv av trig.ettan (+1p)

Fullständig, logisk härledning (+1p)

8. Härled omskrivningen $a\cos v + b\sin v = c\sin(v + \phi)$ (5p)

Lösning: Se t.ex. avsnitt 3.18

Poängsättning

Godtagbar ansats, tex ställt upp hjälptriangel (+1p)

Påbörjar omskrivning (+1p)

godtagbar omskrivning med motivering, tex add.formel för sinus (+1p)

Godtagbar motiviering/härledning av c (+1p)

Påbörjar härledning av ϕ (+1p)

Godtagbar motivering av ϕ för både b<0 och b>0 (+1p)

TRIGONOMETRISKA FORMLER

Additions- och subtraktionsformlerna

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

Formler för dubbla vinkeln

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

Omskrivning till amplitud-fasvinkelform

$a\cos v + b\sin v = c\sin(v + \phi)$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\phi = \arctan(\frac{a}{b})$, om $b > 0$

$\phi = \arctan(\frac{a}{b}) + \pi$, om $b < 0$