Matematiska vetenskaper
Chalmers
Johan Björklund

Datum: 2017-01-13 Tid: 08:30-12:30
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Telefonvakt: Torbjörn Lundh Tel.: 0709847070

Tentamen i MVE425 del B.

Lösningar bör vara väl motiverade. Om inget annat anges så skall svar ges exakt (dvs $x = \pi$ snarare än $x \approx 3.14$). Maximal poäng är 50. För betyg 3 krävs 20 poäng, 4 krävs 32 poäng, 5 krävs 42 poäng.

1. Denna uppgift består i ett antal påståenden. Varje påstående ska endast besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger 1p och fel svar ger -1 poäng (inget svar ger 0p). Man kan inte få mindre än 0p totalt på denna uppgift.

   a) Det gäller alltid att $\sin(\arcsin x) = x$ för alla x där båda sidorna är definierade.

   b) Låt z vara ett komplext tal. Då är $\dfrac{z}{\bar{z}}$ alltid ett reellt tal.

   c) Om $f(x)$ har gränsvärdet 3 då x går mot 5 så är alltid $f(5) = 3$.

   d) $f(x) = x^2$ är en inverterbar funktion.

   e) Om $re^{iv} = Re^{iV}$ där r, R, v, V är positiva reella tal så är $r = R$.

   f) Om $\sin v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ så vet vi att $\cos v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

   SVAR:
   a) sant
   b) falskt
   c) falskt
   d) falskt
   e) sant
   f) falskt

2. I följande uppgift skall endast svar anges.

   a) En triangel har två sidor $a = 2$ och $b = 1$ med mellanliggande vinkel $C = \pi/3$. Bestäm triangelns area. (2p)

   b) En triangel har två sidor $a = 5$ och $b = 3$ så att $\sin B = 1/4$ där B är vinkeln motstående sidan B. Bestäm $\sin A$ där A är vinkeln motstående sidan a. (2p)

   c) En triangel har sidorna $a = 3, b = 4, c = 4$. Bestäm $\cos C$ där C är vinkeln motstående sidan c. (2p)

   SVAR:
   a) Arean är $0.5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
   b) $\frac{3}{1/4} = \frac{5}{\sin A}$ ger $sinA = \frac{5}{12}$.
   c) $2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2$ ger $\cos C = \frac{3}{8}$

   Rättningskommentarer:
   2p för rätt svar på varje, 1p för "nästan" rätt svar, t.ex. 3/4 eller -3/8 på c).

3. Lös följande ekvationer

   a) $\ln(x+2)+\ln(x-2)=\ln 5$ (2p)

   b) $\sin 3v = \cos 2v$ (2p)

   SVAR:
   a) $\ln(x^2-4)=ln5$ ger $x^2-4=5$ Vi får en falsk rot $x=-3$ samt den riktiga roten $x=3$
   b) Kan exempelvis lösas genom att använda $\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$ för att få $\sin(3v)=\sin(2v+\frac{\pi}{2})$. Då finns två lösningsfamiljer. $3v=2v+\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot n$ samt $3v=\pi-2v-\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot n$. vi får de två lösningarna (som kommer i familjer där n är godtyckligt heltal).

$$v_1=\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot n$$
$$v_2=\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}\pi\cdot n.$$

   Rättningskommentarer:
   Poängavdrag på a) om man inte kollar falska rötter/bara påstår att x=3 är roten utan motivation (mindre poängavdrag för andra). På b), får 1p för att hitta en lösningsfamilj, 0.5p om man bara hittar en lösning (t.ex x=pi/2). Avdrag för diverse misstag/periodfel etc.

4. Polynomet $z^4-4z^3-4z^2+36z-45$ har en rot $z_1=2+i$. Finn alla rötter. (6p)

   SVAR:Reella koefficienter ger att rötter kommer i konjugerade par. Alltså så är $z_2=2-i$ en rot. Då är z^2-4z+5 en faktor. Den andra faktorn kan fås genom exempelvis ansättning eller polynomdivision. Den är z^2-9 så de andra två rötterna är $z_3=3$ samt $z_4=-3$.

   Rättningskommentarer:
   Att hitta en rot via konjugerade par ger 2 delpoäng ungefär, ansätta $p(z)=(z-r_1)(z-r_2)g(z)$ och sedan ta fram $g(z)$ ger 2 delpoäng till, att sedan hitta rötterna till g(z) och sammanställa alla rötter korrekt ger ytterligare poäng för att få fullt.

5. Lös ekvationen $z^6=(1+i)^6$. Lösningar kan anges på polär form. (6p)

   SVAR:Ansätt $z=re^{iv}$. Då har vi $1+i=\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$ och $r^6e^{6iv}=2^3e^{\frac{6\pi i}{4}}$. Då är $r=\sqrt{2}$ och $v=\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{3}$ där n är ett godtyckligt heltal. Rötterna blir alltså:

$$z_1=\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$$
$$z_2=\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}+\frac{\pi i}{3}}$$
$$z_3=\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}+\frac{2\pi i}{3}}$$
$$z_4=\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}+\frac{3\pi i}{3}}$$
$$z_5=\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}+\frac{4\pi i}{3}}$$
$$z_6=\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}+\frac{5\pi i}{3}}$$

   Rättningskommentarer: Flera saker som ska göras: Hitta polär form på HL ger delpoäng kanske 2 st (skriva om 1+i först, och sedan hantera att det är $(1+i)^6$). Ansats på $z=re^{iv}$. Vinklar och absolutbelopp ska identifieras. Vinklar ska anges med korrekt period och det ska sammanställas till vad z är. Detta ger 2-3 poäng till. Sedan så ska verkliga svaret ges (dvs vi vill bara ha 6 rötter) för att få full poäng.

6. Visa följande likheter:

a) $2\sin u \sin v = \cos(u-v) - \cos(u+v)$ (2p)

b) $\sin(x+y+z) = \cos x \cos y \sin z + \cos y \cos z \sin x + \cos z \cos x \sin y - \sin x \sin y \sin z$ (3p)

SVAR:Dessa kan visas på flera sätt, här är ett av dem. a) $\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$ samt $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$ enligt formelsamling. Alltså så är $2\sin u \sin v = \cos(u-v) - \cos(u+v)$.
b) $sin(x+y+z) = Im(e^{(x+y+z)i} = Im(e^{ix}e^{iy}e^{iz}) = Im((\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y)(\cos z + i\sin z) = \cos x \cos y \sin z + \cos y \cos z \sin x + \cos z \cos x \sin y - \sin x \sin y \sin z$

Rättningskommentarer:
Då det var fel på uppg6b så gav jag 3p på uppgift a (tror nästan alla gjorde rätt eller inget alls här, så det var inte så komplicerat att rätta). På b) så gav jag två poäng om man hade något som ledde åt rätt håll, t.ex. använda additionsformel på $sin(x+y+z) = sin((x+y)+z)$ i flera steg. Själva observationen $sin(x+y+z) = sin((x+y)+z)$ med senare misstag eller tveksamheter kan ge endast 1p. Om man faktiskt VISAR att HL inte var lika med VL (genom att t.ex. ge en vinkel då de inte stämmer överens) skulle också gett 2p, dock så var det ingen som faktiskt visade detta (även om det var många som påstod det).

7. a) Beräkna

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}.$$

(2p)

b) Beräkna

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}.$$

(2p)

c) Bestäm a, b så att följande funktion är kontinuerlig

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{om } x > 2 \\ ax+b, & \text{om } 0 \le x \le 2 \\ \frac{\sin(3x)}{x}, & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

(2p)

SVAR:
a)Polynomdivision ger $x+2$ som har gränsvärde 4.
b) Förlänger vi med 3 så får vi $3\frac{sin(3x)}{3x}$ som går mot 3. Ett (mer komplicerat) alternativ är att använda formeln i 6b med $x = y = z$.
c) Utanför brytpunkterna ($x = 0$ och $x = 2$) så är funktionen kontinurlig då delarna är kontinuerliga. Det är kvar att undersöka brytpunkterna. För kontinuitet så ska gränsvärde vara lika med funktionsvärdet. Detta ger genom höger/vänstergränsvärde (tillsammans med a) och b)) att $4 = 2a + b = 2a + b$ samt $3 = b = b$. Det inses lätt att $a = \frac{1}{2}, b = 3$ är enda lösningarna.

Rättningskommentarer:
På a) och b) så fick man 0.5-1p för rätt svar och resten för uträkning. På c) så Bör man dels påpeka att brytpunkterna är de intressanta (man kan förlora 0-0.5 p här). Därefter så bör man säga något om hur man använder kontinuitet (t.ex. VGV=HGV i punkterna), räkna ut HGV/VGV och till sist lösa ekvationssystemet. Då det är flera delar så kan man få flera små avdrag.

8. Antag att z är ett komplext tal så att $|z| = 1$ och att z inte är reellt. Visa att $\frac{z+1}{z-1}$ är rent imaginärt (dvs har realdel 0). (6p)

SVAR: Vi minns att $z\bar{z} = |z|^2 = 1^2 = 1$. Notera att $\overline{z-1} = \bar{z} - 1$ och att $w\bar{w} = |w|^2$ för alla komplexa w. Vi har

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{(z+1)(\bar{z}-1)}{(z-1)(\bar{z}-1)} = \frac{z\bar{z} - 1 + \bar{z} - z}{|z-1|^2} = \frac{\bar{z}-z}{|z-1|^2}.$$

Vi ansätter nu $z = a + bi$. Då har vi

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{\bar{z}-z}{|z-1|^2} = \frac{(a-bi)-(a+bi)}{|a+bi-1|^2} = \frac{-2bi}{|a+bi-1|^2}.$$

Då $\frac{-2b}{|a+bi-1|^2}$ är reellt (då b och absolutbelopp är det) så är alltså $\frac{-2bi}{|a+bi-1|^2}$ rent imaginärt (ett reellt tal multiplicerat med i) vilket skulle visas.

Extra kommentar: Om man läser mer om komplexa tal (eller har en väldigt välutvecklad känsla för geometrin hos rationella funktioner) så kan man se att funktionen $w = f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ är en såkallad Möbiusavbildning som har den trevliga egenskapen att den avbildar cirklar och linjer i komplexa talplanet på andra cirklar och linjer (så en cirkel kan hamna på en linje och vice versa). Då startar vi med cirkeln $|z| = 1$. $f(-1) = 0$, $f(i) = i$ och $f(-i) = -i$. Då det inte kan gå någon cirkel genom $-i, 0, i$ så måste alltså vår cirkel $|z| = 1$ hamna på en linje, den linjen som går igenom de tre punkterna är just linjen $Rew = 0$.

Rättningskommentarer:
Om man kollar något fall (vanligen $\pm i$ från ett feltänk ang. vad z kan vara) så får man 0.5p. Korrekta observationer som kan vara användbara, exempelvis $a^2 + b^2 = 1$ då $|z| = 1$ eller $b \neq 0$ kan också ge 1p eller så. Inte så många som kom längre utan att klara alltihopa, men delpoäng kan ges för att förlänga med konjugatet (dvs med $\bar{z} - 1$, inte $z + 1$).

9. Formulera och visa Eulers formler (du får utgå ifrån definitionen av e^{iv}). (5p)

   SVAR:Se boken.

   Rättningskommentarer:
   De flesta som gjorde denna klarade det bra. Jag drog av litegrann för att man bara använde $e^{-iv} = \cos v - i \sin v$ direkt, då man bara fick anta formeln för e^{iv}, dvs man borde skriva mellansteget $e^{-iv} = \cos(-v) + i \sin(-v) = \cos v - i \sin v$. Om jag minns rätt så fick man 2p rakt av för korrekt formulering av vad sin/cos är.