Matematiska vetenskaper
Chalmers
Johan Björklund

Datum: 2017-02-17 Tid: 14:00-18:00
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Telefonvakt: Johan Björklund Tel.:

Tentamen i MVE425 del B.

Lösningar bör vara väl motiverade. Om inget annat anges så skall svar ges exakt (dvs $x = \pi$ snarare än $x \approx 3.14$). Maximal poäng är 50. För betyg 3 krävs 20 poäng, 4 krävs 32 poäng, 5 krävs 42 poäng. Poängen per uppgift bör ses som ungefärlig. Hänsyn tas också till tentans helhetsintryck, exempelvis hur väl kursens delmoment behärskas.

1. Denna uppgift består i ett antal påståenden. Varje påstående ska endast besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger 1p och fel svar ger -1 poäng (inget svar ger 0p). Man kan inte få mindre än 0p totalt på denna uppgift.

   a) Det gäller alltid att $\arccos \cos x = x$ för alla reella x.

   b) Låt z vara ett komplext tal. Då är $z - \bar{z}$ alltid ett reellt tal.

   c) Om $f(x)$ är en kontinuerlig funktion definierad för alla reella tal så att $f(1) = 1$ så existerar gränsvärdet för $f(x)$ då x går mot 1.

   d) $f(x) = x^3$ är en inverterbar funktion.

   e) Om $|z| = |w| \neq 0$ så är $|\frac{z}{w}| = 1$.

   f) Om $\sin v = \sin w$ och $\cos v = \cos w$ så är $v = w$

2. I följande uppgift skall endast svar anges.

   a) En triangel har sidor $2, 3$ och mellanliggande vinkel $\pi/6$. Bestäm triangelns area. (2p)

   b) För en triangel med två sidor $a = 10$ och $b = 15$ så gäller att $sinB = \frac{2}{3}$ där B är vinkeln motstående sidan b. Bestäm $\sin A$ där A är vinkeln motstående sidan a. (2p)

   c) En triangel har sidorna $a = 4, b = 5, c = 4$. Bestäm $\cos C$ där C är vinkeln motstående sidan c. (2p)

3. Lös följande ekvationer

   a) $\ln\left((x-1)^3\right) = \ln(x-1)$ (2p)

   b) $\cos 3v = \cos 2v$ (2p)

4. Polynomet $z^3 - (2+2i)z^2 + (2+4i)z - 4i$ har en imaginär rot. Hitta alla rötter. Tips: Ansätt z=bi och kolla real/imaginärdel för att hitta en rot. (6p)

5. Lös ekvationen $(z - i)^4 = -1$. Rita ut rötterna i det komplexa talplanet. (6p)

Var god vänd!

6. a) Visa följande likhet: $2\sin u \cos v = \sin(u+v) + \sin(u-v)$ (2p)

   b) Bestäm a och b så att $\sin v + \sqrt{3}\cos v = a\sin(v+b)$. (3p)

7. a) Beräkna

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x-3}.$$

(2p)

   b) Beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{2x}.$$

(2p)

   c) Bestäm a, b så att följande funktion är kontinuerlig

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-3}{x-3}, & \text{om } x > 3 \\ ax+b, & \text{om } 0 \le x \le 3 \\ \frac{\tan x}{2x}, & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

(2p)

8. Låt z vara ett komplext tal så att det löser både ekvationerna $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ och $bz^3 + cz^2 + dz + a = 0$ (där a, b, c, d är reella tal sådana att $a \neq 0$). Bestäm alla värden z kan anta.
För en komplett lösning krävs:

- Att alla sådana tal hittas.
- Att varje hittat tal visas vara en möjlig gemensam lösning (genom olika exempel på a, b, c, d, kan vara olika a, b, c, d för olika värden på z).
- Att det visas att inga andra gemensamma rötter kan finnas.

(6p)

9. Ge den formella definitionen (med ϵ och δ) för att

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

(5p)