Matematiska vetenskaper
Chalmers
Johan Björklund

Datum: 2017-02-17 Tid: 14:00-18:00
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Telefonvakt: Johan Björklund Tel.:

Tentamen i MVE425 del B.

Lösningar bör vara väl motiverade. Om inget annat anges så skall svar ges exakt (dvs $x = \pi$ snarare än $x \approx 3.14$). Maximal poäng är 50. För betyg 3 krävs 20 poäng, 4 krävs 32 poäng, 5 krävs 42 poäng. Poängen per uppgift bör ses som ungefärlig. Hänsyn tas också till tentans helhetsintryck, exempelvis hur väl kursens delmoment behärskas.

1. Denna uppgift består i ett antal påståenden. Varje påstående ska endast besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger 1p och fel svar ger -1 poäng (inget svar ger 0p). Man kan inte få mindre än 0p totalt på denna uppgift.

   a) Det gäller alltid att $\arccos \cos x = x$ för alla reella x.

   b) Låt z vara ett komplext tal. Då är $z - \bar{z}$ alltid ett reellt tal.

   c) Om $f(x)$ är en kontinuerlig funktion definierad för alla reella tal så att $f(1) = 1$ så existerar gränsvärdet för $f(x)$ då x går mot 1.

   d) $f(x) = x^3$ är en inverterbar funktion.

   e) Om $|z| = |w| \neq 0$ så är $|\frac{z}{w}| = 1$.

   f) Om $\sin v = \sin w$ och $\cos v = \cos w$ så är $v = w$

   SVAR:
   S,F,S,S,S,F

2. I följande uppgift skall endast svar anges.

   a) En triangel har sidor $2, 3$ och mellanliggande vinkel $\pi/6$. Bestäm triangelns area. (2p)

   b) För en triangel med två sidor $a = 10$ och $b = 15$ så gäller att $sinB = \frac{2}{3}$ där B är vinkeln motstående sidan b. Bestäm $\sin A$ där A är vinkeln motstående sidan a. (2p)

   c) En triangel har sidorna $a = 4, b = 5, c = 4$. Bestäm $\cos C$ där C är vinkeln motstående sidan c. (2p)

   SVAR:
   $\frac{3}{2}$
   $\sin A = \frac{4}{9}$
   $\cos C = \frac{5}{8}$

3. Lös följande ekvationer

   a) $\ln\left((x-1)^3\right) = \ln(x-1)$ (2p)

   b) $\cos 3v = \cos 2v$ (2p)

   SVAR:
   a) x=2, logaritmlagar ger $3\ln(x-1) = ln(x-1)$ som ger $ln(x-1) = 0$, dvs $x = 2$.
   b) $v = \frac{2\pi n}{5}$. Notera att den ena lösningsfamiljen ingår i den andra.

4. Polynomet $z^3 - (2+2i)z^2 + (2+4i)z - 4i$ har en imaginär rot. Hitta alla rötter. Tips: Ansätt z=bi och kolla real/imaginärdel för att hitta en rot. (6p)

SVAR:
Ansättning av $z = bi$ ger

$$0 + 0i = -ib^3 + 2b^2 + 2b^2 i + 2bi - 4b - 4i = (2b^2 - 4b) + (-b^3 + 2b^2 + 2b - 4)i.$$

Genom att sätta real/im-del=0 så ser vi att vi har en gemensam rot $b = 2$. Alltså så är en rot $z = 2i$.
Division med $(z - 2i)$ ger $z^3 - (2+2i)z^2 + (2+4i)z - 4i = (z-2i)(z^2 - 2z + 2)$.
Vi ser då att rötterna är $z_1 = 2i, z_2 = 1 + i, z_3 = 1 - i$.

5. Lös ekvationen $(z - i)^4 = -1$. Rita ut rötterna i det komplexa talplanet. (6p)

SVAR:
$z - i = w$ ger $w^4 = -1$. Denna binomekvation löses som vanligt och vi får

$$w_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$
$$w_2 = \frac{i-1}{\sqrt{2}}$$
$$w_3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$$
$$w_4 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Återsubstitution ger (via $z = w + i$)

$$z_1 = \frac{1 + (1+\sqrt{2})i}{\sqrt{2}}$$
$$z_2 = \frac{(1+\sqrt{2})i - 1}{\sqrt{2}}$$
$$z_3 = \frac{-1 + (\sqrt{2}-1)i}{\sqrt{2}}$$
$$z_4 = \frac{1 + (\sqrt{2}-1)i}{\sqrt{2}}.$$

Var god vänd!

6. a) Visa följande likhet: $2\sin u \cos v = \sin(u+v) + \sin(u-v)$ (2p)

b) Bestäm a och b så att $\sin v + \sqrt{3}\cos v = a\sin(v+b)$. (3p)

SVAR:
Dessa två följer nästan direkt ur formelsamlingen. Det enda kluriga är att i b) så står sin först (tvärsom i formelsamlingen).
I b) så är $a = 2$ och $b = \frac{\pi}{3}$. Notera att de inte är unikt bestämda (vi kan exempelvis använda $\sin x = \sin(\pi - x)$ för att få andra värden.

7. a) Beräkna

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}.$$

(2p)

b) Beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{2x}.$$

(2p)

c) Bestäm a, b så att följande funktion är kontinuerlig

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-3}{x-3}, & \text{om } x > 3 \\ ax + b, & \text{om } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{\tan x}{2x}, & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

(2p)

SVAR:
I a) faktoriserar vi $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$.
Då är $\frac{x^2-2x-3}{x-3} = x + 1$
Det ger att gränsvärdet blir 4.
I b) så noterar vi att $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Det ger $\frac{\tan x}{2x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{2\cos x}$.
Standardgränsvärden ger nu att b) har gränsvärde $\frac{1}{2}$.
I c) noterar vi att då delfunktionerna är definierade så är de kontinuerliga (dock är inte $\tan x$ definierad överallt, men för kontinuitet så är det bara på definitionsmängden man tittar).
Då ska VGV=HGV i brytpunkterna och vi får $b = \frac{1}{2}$, $3a + b = 4$. Detta ger $b = \frac{1}{2}, a = \frac{7}{6}$.

8. Låt z vara ett komplext tal så att det löser både ekvationerna $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ och $bz^3 + cz^2 + dz + a = 0$ (där a, b, c, d är reella tal sådana att $a \neq 0$). Bestäm alla värden z kan anta.
För en komplett lösning krävs:

- Att alla sådana tal hittas.
- Att varje hittat tal visas vara en möjlig gemensam lösning (genom olika exempel på a, b, c, d, kan vara olika a, b, c, d för olika värden på z).
- Att det visas att inga andra gemensamma rötter kan finnas.

(6p)

SVAR:
Lurigare uppgift! Vi noterar att ekvationerna är rätt lika varandra, i ena så är potenserna ett steg högre. Det kan vi fixa om vi multiplicerar med z

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

$$bz^3 + cz^2 + dz + a = 0$$

ger då att

$$az^4 + bz^3 + cz^2 + dz = 0z = 0$$

$$bz^3 + cz^2 + dz + a = 0.$$

Vi subtraherar ekvation 2 från ekvation 1 och får

$$az^4 - a = a(z^4 - 1) = 0.$$

Då $a \neq 0$ så måste $z^4 - 1$ vara noll. Då finns endast 4 potentiella gemensamma rötter, $\pm 1, \pm i$. Det återstår att hitta a, b, c, d då de är gemensamma rötter. Då $z^4 - 1 = (z-1)(z^3 + z^2 + z + 1)$ så ser vi direkt att $-1, \pm i$ är gemensamma rötter till $z^3 + z^2 + z + 1$ och $z^3 + z^2 + z + 1$ (dvs $a = b = c = d = 1$).
Det återstår att hitta exempel då 1 är en gemensam rot. Ett enkelt sådant är $a = c = 1, b = d = -1$. Då har vi $z^3 - z^2 + z - 1$ och $-z^3 + z^2 - z + 1$. Uppenbart så är 1 en gemensam rot.

9. Ge den formella definitionen (med ϵ och δ) för att

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

(5p)

SVAR:
Se boken.