Matematiska vetenskaper	Datum: 2017-08-23	Tid: 8:30-12:30
Göteborgs universitet	Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.	
Johan Björklund	Telefonvakt: Thomas Wernstål	Tel.: ankn ?

Tentamen i MVE425 del B.

Lösningar bör vara väl motiverade. Om inget annat anges så skall svar ges exakt (dvs $x = \pi$ snarare än $x \approx 3.14$). Maximal poäng är 50. För betyg 3 krävs 20 poäng, 4 krävs 32 poäng, 5 krävs 42 poäng. Poängen per uppgift bör ses som ungefärlig. Hänsyn tas också till tentans helhetsintryck, exempelvis hur väl kursens delmoment behärskas.

1. Denna uppgift består i ett antal påståenden. Varje påstående ska endast besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger 1p och fel svar ger -1 poäng (inget svar ger 0p). Man kan inte få mindre än 0p totalt på denna uppgift.

   a) Det gäller alltid att $\arcsin \sin x = x$ för alla x där båda sidorna är definierade.

   b) Låt z vara ett komplext tal. Då är $z + \bar{z}$ alltid ett reellt tal.

   c) Om $f(x)$ och $g(x)$ båda är kontinuerliga funktioner så är $f(x) \cdot g(x)$ en kontinuerlig funktion.

   d) Funktionen $\sqrt{2x+3}$ är definierad för alla reella x.

   e) Om $re^{iv} = Re^{iV}$ där r, R, v, V är positiva reella tal så är $v = V$.

   f) Ekvationen $\sin v = k$ har alltid (minst) en lösning $v \in \mathbb{R}$ för alla $k \in \mathbb{R}$.

6p

2. I följande uppgift skall endast svar anges.

   a) T är en triangel med sidor $2, 4$ och mellanliggande vinkel $\frac{\pi}{2}$. Bestäm $T : s$ area.

   b) För en triangel T med två sidor $a = 15$ och $b = 25$ så gäller att $sinB = \frac{3}{4}$ där B är vinkeln motstående sidan b. Bestäm $\sin A$ där A är vinkeln motstående sidan a.

   c) Låt T vara en triangel med sidorna $a = 6, b = 8, c = 10$. Bestäm $\cos C$ där C är vinkeln motstående sidan c.

6p

3. Lös följande ekvationer

   a) $2\ln(x+2) = \ln 4$

   b) $\sin 2v = \sin(3v + \pi)$

4p

4. Polynomet $z^3 - 4z^2 + (4-i)z - (3-3i)$ har en reell rot. Hitta alla rötter.

6p

5. Lös ekvationen $(z^2 - 1)(z^3 + 1) = 0$. Lösningar kan anges på antingen polär form och/eller "vanlig" $a + bi$ form.

6p

Var god vänd!

6. Visa följande likheter:

   a) $2\cos u \sin v = \sin(u+v) - \sin(u-v)$

   b) $\sin^2 x + \sin^2 x \tan^2 x = \tan^2 x$

5p

7. a) Beräkna

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}.$$

   b) Beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{x}.$$

   c) Bestäm a, b så att följande funktion är kontinuerlig (där den är definierad). Kom ihåg att motivera för ALLA sådana punkter.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}, & \text{om } x > 1 \\ ax+b, & \text{om } 0 \le x \le 1 \\ \frac{\tan(2x)}{x}, & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

6p

8. I det komplexa talplanet finns en kvadrat inskriven. Två av hörnen ligger i punkterna $2+2i$ och $3+4i$. Ange vilka punkter de andra hörnen kan ligga i.

6p

9. Formulera och bevisa logaritmlagarna (du får utgå från lagarna för exponentialfunktioner).

5p

TRIGONOMETRISKA FORMLER

Additions- och subtraktionsformlerna

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

Formler för dubbla vinkeln

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

Omskrivning till amplitud-fasvinkelform

$a\cos v + b\sin v = c\sin(v + \phi)$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\phi = \arctan\dfrac{a}{b}$ om $b > 0$

$\phi = \arctan\dfrac{a}{b} + \pi$ om $b < 0$