Matematiska vetenskaper
Göteborgs universitet
Johan Björklund

Datum: 2017-08-23 Tid: 8:30-12:30
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Telefonvakt: Thomas Wernstål Tel.: ankn ?

Tentamen i MVE425 del B.

Lösningar bör vara väl motiverade. Om inget annat anges så skall svar ges exakt (dvs $x = \pi$ snarare än $x \approx 3.14$). Maximal poäng är 50. För betyg 3 krävs 20 poäng, 4 krävs 32 poäng, 5 krävs 42 poäng. Poängen per uppgift bör ses som ungefärlig. Hänsyn tas också till tentans helhetsintryck, exempelvis hur väl kursens delmoment behärskas.

1. Denna uppgift består i ett antal påståenden. Varje påstående ska endast besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger 1p och fel svar ger -1 poäng (inget svar ger 0p). Man kan inte få mindre än 0p totalt på denna uppgift.

   a) Det gäller alltid att $\arcsin \sin x = x$ för alla x där båda sidorna är definierade.

   b) Låt z vara ett komplext tal. Då är $z + \bar{z}$ alltid ett reellt tal.

   c) Om $f(x)$ och $g(x)$ båda är kontinuerliga funktioner så är $f(x) \cdot g(x)$ en kontinuerlig funktion.

   d) Funktionen $\sqrt{2x+3}$ är definierad för alla reella x.

   e) Om $re^{iv} = Re^{iV}$ där r, R, v, V är positiva reella tal så är $v = V$.

   f) Ekvationen $\sin v = k$ har alltid (minst) en lösning $v \in \mathbb{R}$ för alla $k \in \mathbb{R}$.

6p

SVAR: a) Falskt (2π och 0 ger samma VL)
b) Sant
c) Sant
d) Falskt, ej definierad för t.ex. $x = -2$
e) Falskt, vi kan exempelvis öka V med 2π för att få fler möjligheter f) Falskt, har ej lösning då $k = 2$ exempelvis

2. I följande uppgift skall endast svar anges.

   a) T är en triangel med sidor $2, 4$ och mellanliggande vinkel $\frac{\pi}{2}$. Bestäm $T : s$ area.

   b) För en triangel T med två sidor $a = 15$ och $b = 25$ så gäller att $sinB = \frac{3}{4}$ där B är vinkeln motstående sidan b. Bestäm $\sin A$ där A är vinkeln motstående sidan a.

   c) Låt T vara en triangel med sidorna $a = 6, b = 8, c = 10$. Bestäm $\cos C$ där C är vinkeln motstående sidan c.

6p

Svar:a) Arean är 4, kan ges av areasatsen (eller att detta faktiskt är rätvinklig triangel).
b) Sinusatsen ger $\sin A = a\frac{\sin B}{b} = \frac{9}{20}$.
c) Cosinussatsen ger $\cos C = 0$.

3. Lös följande ekvationer

   a) $2\ln(x+2) = \ln 4$

   b) $\sin 2v = \sin(3v + \pi)$

4p

SVAR:a) $x = 0$ är enda lösningen. Kan ses exempelvis genom att använda logaritmregler för att få $(x+2)^2 = 4$. Två rötter, $x = 0$, $x = -4$ en rot är falsk efter insättning.
b) Två lösningsfamiljer $v = \pi + 2\pi n$, $v = \frac{2n\pi}{5}$.

4. Polynomet $z^3 - 4z^2 + (4-i)z - (3-3i)$ har en reell rot. Hitta alla rötter.

6p

SVAR: Ansätt $z = a$ där a reellt och ta imaginärdel av båda sidorna. Detta ger $-a + 3 = 0$. Den reella roten är alltså $a = 3$. Division med $(z-3)$ ger $z^2 - z + 1 - i$ kvar. Denna löses på vanligt sätt (kvadratkomplettering etc) för att få fram rötter $z = -i$ och $z = 1 + i$.

5. Lös ekvationen $(z^2 - 1)(z^3 + 1) = 0$. Lösningar kan anges på antingen polär form och/eller "vanlig" $a + bi$ form.

6p

SVAR: Observera att antingen så är $z^2 - 1 = 0$ eller så är $z^3 + 1 = 0$. Båda ekvationerna är på formen $z^n = w$. Första kan lösas direkt med konjugatregeln för att få $z_1 = 1, z_2 = -1$. Den andra ekvationen så ansätter vi $z = re^{iv}$. Då får vi $r^3 e^{3iv} = -1 = 1 \cdot e^{\pi i}$. Då följer att $r = 1$, $3v = \pi + 2\pi n$ som vidare ger $v = \frac{\pi + 2\pi n}{3}$. Alltså så får vi de tre lösningarna $z_3 = e^{i\frac{\pi}{3}}, z_4 = e^{i\pi}, z_5 = e^{i\frac{5\pi}{3}}$. Vi observerar att $z_2 = z_4$ så vi har en dubbelrot.

Var god vänd!

6. Visa följande likheter:

   a) $2\cos u \sin v = \sin(u+v) - \sin(u-v)$

   b) $\sin^2 x + \sin^2 x \tan^2 x = \tan^2 x$

5p

SVAR:a) Sätt in från formelsamlingen och det faller ut direkt.
b) $\sin^2 x + \sin^2 x \tan^2 x = \sin^2 x(1+\tan^2 x) = \sin^2 x(1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}) = \sin^2 x(\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}) = \sin^2 x(\frac{1}{\cos^2 x}) = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$

7. a) Beräkna

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}.$$

   b) Beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{x}.$$

   c) Bestäm a, b så att följande funktion är kontinuerlig (där den är definierad). Kom ihåg att motivera för ALLA sådana punkter.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}, & \text{om } x > 1 \\ ax+b, & \text{om } 0 \le x \le 1 \\ \frac{\tan(2x)}{x}, & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

6p

SVAR: a) Förläng med konjugatet och vi får $\frac{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = (x+1)(\sqrt{x}+1)$. Gränsvärdet blir 4.
b) $\frac{\tan(2x)}{x} = \frac{2\sin(2x)}{2x\cos(2x)}$ Då $\frac{\sin y}{y}$ går mot 1 då y går mot 0 så har vi gränsvärdet 2.
c) Utanför brytpunkterna är delfunktionerna kontinuerliga så vi måste kolla VGV=HGV=punktvä i brytpunkterna. $ax+b$ är lätt att beräkna gränsvärden för då den är kontinuerlig, och för de andra så använder vi a) och b). Detta ger $a+b=4$, $b=2$. Det följer då att $a=2$ och vi är klara.

8. I det komplexa talplanet finns en kvadrat inskriven. Två av hörnen ligger i punkterna $2+2i$ och $3+4i$. Ange vilka punkter de andra hörnen kan ligga i.

6p

SVAR: Det finns flera sätt att lösa denna uppgift (man kan bland annat tänka på saker som punkter $(2,2)$ och $(3,4)$ i $\mathbb{R}^2$), här presenteras ett sätt. Uppgiften blir lättare om man ritar bilder.

Här finns flera möjligheter, de två punkterna vara två hörn på samma sida, eller så kan de vara diagonalt motsatta (här hjälper det nog att rita en bild). Vi börjar med samma sidafallet. Även detta fall kan delas upp i två möjligheter (är kvadraten till höger eller till vänster om linjesegmentet som förbinder dem). Om vi tänker oss att vi står på $2+2i$ så måste vi lägga till $1+2i$ för att komma till $3+4i$. För att komma till ett av de okända hörnen så skulle vi vilja gå lika långt till, men i en riktning som är 90 grader mot den sidan vi har. Ett sätt att få ett komplext tal/riktning som är ortogonalt mot ett tidigare är att multiplicera det med i. Detta roterar komplexa tal motsols med 90 grader. Då får vi $i(1+2i) = i-2$. Om vi adderar det till $3+4i$ så når vi det potentiella hörnet $1+5i$. Vill vi nu nå nästa hör så roterar vi igen och går då i riktning $-2i-1$. Då hamnar vi i $3i$. Alltså så är ett potentiellt hörnpar $3i, 1+5i$. Vi kan få ett till hörnpar $4+i$, $5+3i$ genom att istället för att vända motsols/multiplicera med i så vänder vi medsols/multiplicerar med $-i$. Om vi är på diagonalen så är det lätt att hitta mittpunken, vi startar från $2+2i$, men istället för att lägga till $1+2i$ och gå hela vägen till $3+4i$ så adderar vi $0.5+i$ och går halva vägen (man kan också se det som medelvärdet av de två hörnen) till $2.5+3i$. Vi går nu i samma riktning roterat 90 grader (dvs vi adderar $i(0.5+i) = 0.5i-1$ och får ett tredje hörn $1.5+3.5i$. Det fjärde hörnet fås på motsvarande sätt med medsols rotering och är $3.5+2.5i$.

9. Formulera och bevisa logaritmlagarna (du får utgå från lagarna för exponentialfunktioner).

5p