Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola

Lösningsförslag till övningstenta
Hösttermin 2017

MVE425: Tekniskt basår – Matematik, del B

Uppgift 1. Logaritmfunktionen är definierad endast för positiva reella tal. För att bestämma definitionsmängden, så måste de uttryck som står i parenteserna vid ln vara positiva. Således får man två villkor: $x+3>0$ och $x-3>0$ som ska vara uppfyllda samtidigt. De två olikheterna förenklas till ett enda villkor, nämligen $x>3$. Då blir $D_f=(3,\infty)$.

OBS: Det är ett grovt fel att först förenkla funktionen till $f(x)=\ln(\frac{x+3}{x-3})$ och sedan ta fram definitionsmängden. Notera att definitionsmängden kan förändras när man förenklar funktionsuttrycket m.h.a. logaritmlagarna.

Den inversa funktionen bestäms genom att lösa ut x från sambandet $y=\ln(x+3)-\ln(x-3)$:

$$y=\ln(x+3)-\ln(x-3)\Leftrightarrow \Big/\text{exp:funktionen är bijektiv}\Big/ \Leftrightarrow e^y=e^{\ln(x+3)-\ln(x-3)}$$
$$\Leftrightarrow e^y=\frac{x+3}{x-3}\Leftrightarrow e^y(x-3)=x+3\Leftrightarrow x(e^y-1)=3+3e^y\Leftrightarrow x=\frac{3+3e^y}{e^y-1}.$$

Således är $f^{-1}(y)=\frac{3(e^y+1)}{e^y-1}$.

Värdemängden till f^{-1} sammanfaller med definitionsmängden till f. Därför är $V_{f^{-1}}=D_f=(3,\infty)$.

För att bestämma definitionsmängden till f^{-1}, så skall man bestämma för vilka värden på y som värdet på $f^{-1}(y)$ hamnar inuti $V_{f^{-1}}$. Man ska alltså lösa olikheten $\frac{3(e^y+1)}{e^y-1}>3$:

$$\frac{3(e^y+1)}{e^y-1}>3\Leftrightarrow\frac{e^y+1}{e^y-1}>1\Leftrightarrow\frac{e^y+1}{e^y-1}-1>0\Leftrightarrow\frac{e^y+1-(e^y-1)}{e^y-1}>0\Leftrightarrow\frac{2}{e^y-1}>0.$$

Täljaren är alltid positivt, så behövs det att nämnaren också är positivt, alltså

$$e^y-1>0\Leftrightarrow e^y>1\Leftrightarrow e^y>e^0\Leftrightarrow\Big/\text{exp:funktionen är strängt växande}\Big/\Leftrightarrow y>0.$$

Så $D_{f^{-1}}=(0,\infty)$.

Till slut får man att $V_f=D_{f^{-1}}=(0,\infty)$.

Uppgift 2. (a) $\log_a x$ och a^x är ömsesidigt inversa funktioner. Således

$$\log_2(\log_3(\log_5 x))=0\Leftrightarrow 2^{\log_2(\log_3(\log_5 x))}=2^0\Leftrightarrow\log_3(\log_5 x)=1$$
$$\Leftrightarrow 3^{\log_3(\log_5 x)}=3^1\Leftrightarrow\log_5 x=3\Leftrightarrow 5^{\log_5 x}=5^3\Leftrightarrow x=5^3=125.$$

(b) VL förenklas m.h.a. potenslagarna och därefter substituerar man $t=2^x$:

$$4^x-2^{x+2}+2^{2-x}=1\Leftrightarrow 2^{2x}-4\cdot2^x+\frac{4}{2^x}=1\Leftrightarrow t^2-4t+\frac{4}{t}=1\Leftrightarrow t^3-4t^2+4=t$$
$$\Leftrightarrow t^3-4t^2+-t+4=0\Leftrightarrow t^2(t-4)-(t-4)=0\Leftrightarrow(t-4)(t^2-1)=0$$
$$\Leftrightarrow\Big/\text{konjugatregeln}\Big/\Leftrightarrow(t-4)(t-1)(t+1)=0.$$

Man får alltså tre lösningar: $t = 4$, $t = 1$ och $t = -1$. Det kvarstår att räkna ut x via bakåtsubstitution i sambandet $t = 2^x$.

(i) $t = 4 = 2^x \Leftrightarrow x = 2$; (ii) $t = 1 = 2^x \Leftrightarrow x = 0$;

(iii) $t = -1 = 2^x$ är falsk lösning eftersom 2^x är positivt för alla reella värden på x.

(c) $VL = \sin 2x = 2\sin x\cos x$ enligt dubbla vinkelns formel. Ekvationen blir:

$$2\sin x\cos x = \sqrt{3}\cos x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

Således finns det två slags lösningar: (i) $\cos x = 0$, vilket ger $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ där $k \in \mathbb{Z}$;
(ii) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, vilket ger $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ samt $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, där $k \in \mathbb{Z}$.

Uppgift 3. Enligt sinussatsen är

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a} \Rightarrow \frac{\sin\beta}{\sqrt{2}} = \frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Därför är $\beta = 45^\circ$ eller 135°. Egentligen kan det inte vara 135° eftersom $\alpha + \beta = 60^\circ + 135^\circ$ skulle bli större än 180°. Därfor är det bara $\beta = 45^\circ$ som är möjligt.

Summan av triangelns inre vinklar är 180° och så kan man räkna ut $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$.

För att bestämma längden på sidan c, så används sinussatsen igen. Då behöver man räkna ut $\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ enligt additionsformeln för sinus. Sinussatsen ger

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{c}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \text{ l.e.}$$

Arean räknas ut m.h.a. areasatsen:

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{6+2\sqrt{3}}{8} = \frac{3+\sqrt{3}}{4} \text{ a.e.}$$

Uppgift 4. $HL = A\cos(x+\phi) = A(\cos x\cos\phi - \sin x\sin\phi) = A\cos\phi\cos x - A\sin\phi\sin x$. Man identifierar koefficienterna vid $\sin x$ och vid $\cos x$ för att få fram ett ekvationssystem:

$$\begin{cases} \sin x: & \sqrt{3} = -A\sin\phi, \\ \cos x: & -3 = A\cos\phi \end{cases}$$

När man kvadrerar båda ekvationerna och adderar dem ihop, så får man

$$(\sqrt{3})^2 + (-3)^2 = (-A\sin\phi)^2 + (A\cos\phi)^2$$
$$\Leftrightarrow 3 + 9 = A^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi) \Leftrightarrow \Big/\text{trig:ettan}\Big/ \Leftrightarrow 12 = A^2.$$

Så $A = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. När man sätter in detta värde på A i ekvationssystemet ovan, så får man att

$$\begin{cases} \sqrt{3} = -2\sqrt{3}\sin\phi, \\ -3 = 2\sqrt{3}\cos\phi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\phi = -\frac{1}{2}, \\ \cos\phi = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Vinkeln ϕ ligger i 3:e kvadranten och härleds från standardvinkeln 30°, så $\phi = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$.

Uppgift 5.

$$\frac{m-3i}{3+mi}=\frac{m-3i}{3+mi}\cdot\frac{3-mi}{3-mi}=\frac{3m-9i-m^2i+3mi^2}{9-(mi)^2}$$
$$=\frac{3m-9i-m^2i-3m}{9+m^2}=\frac{-9i-m^2i}{9+m^2}=\frac{-i(9+m^2)}{9+m^2}=-i.$$

Uppgift 6 (Rutinmetod)**.** Man börjar med att bestämma samtliga rötter till ekvationen $z^4+16=0$:

$$z^4+16=0\Leftrightarrow z^4=-16\Leftrightarrow z^4=16e^{i(\pi+2k\pi)},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Om $z=re^{i\alpha}$, där $r>0$ och $\alpha\in\mathbb{R}$, så är $z^4=r^4e^{i4\alpha}$. Därför är $r^4=16$ samt $4\alpha=\pi+2k\pi$. Således $r=2$ och $\alpha=\frac{\pi+2k\pi}{4}$. Man bestämmer de fyra rötterna till ekvationen genom att sätta $k=0,1,2,3$:

$$z_1=2e^{i\pi/4}=\sqrt{2}+i\sqrt{2};\qquad z_2=2e^{i3\pi/4}=-\sqrt{2}+i\sqrt{2};$$
$$z_3=2e^{i5\pi/4}=-\sqrt{2}-i\sqrt{2};\qquad z_4=2e^{i7\pi/4}=\sqrt{2}-i\sqrt{2}.$$

Den komplexa faktoruppdelningen av polynomet z^4+16 är produkten $(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$. Man kan observera att $z_4=\overline{z_1}$ och $z_3=\overline{z_2}$. Man får den reella faktoruppdelningen genom att utveckla produkten $(z-z_1)(z-z_4)$ och sedan $(z-z_2)(z-z_3)$, d.v.s. de faktorer som svarar mot komplexkonjugerade rötter multipliceras ihop:

$$(z-z_1)(z-z_4)=(z-\sqrt{2}-i\sqrt{2})(z-\sqrt{2}+i\sqrt{2})=z^2-2\sqrt{2}z+4;$$
$$(z-z_2)(z-z_3)=(z+\sqrt{2}-i\sqrt{2})(z+\sqrt{2}+i\sqrt{2})=z^2+2\sqrt{2}z+4.$$

Svar: $z^4+16=(z^2-2\sqrt{2}z+4)(z^2+2\sqrt{2}+4)$.

Uppgift 6 (Knep)**.** Man utför en lite ovanlig kvadratkomplettering:

$$z^4+16=(z^2)^2+4^2=(z^2+4)^2-8z^2=\text{/konjugatregeln/}=(z^2+4+\sqrt{8}z)(z^2+4-\sqrt{8}z)\,.$$

Uppgift 7. (a) $\lim_{x\to4}(7x-25)=7\cdot4-25=28-25=3$

(b) Till varje positivt tal ε finns det ett positivt tal δ sådant att $|(7x-25)-3|<\varepsilon$ för alla de x som uppfyller $0<|x-4|<\delta$.

Alternativ formulering: Till varje tal $\varepsilon>0$ finns det ett tal $\delta>0$ sådant att $0<|x-4|<\delta$ medför att $|(7x-25)-3|<\varepsilon$.

(c) Antag att $\varepsilon>0$. Vi ska hitta $\delta>0$ som garanterar att $|(7x-25)-3|<\varepsilon$ när $0<|x-4|<\delta$.

$$|(7x-25)-3|<\varepsilon\Leftrightarrow|7x-28|<\varepsilon\Leftrightarrow|7(x-4)|<\varepsilon\Leftrightarrow|x-4|<\frac{\varepsilon}{7}.$$

Om man väljer $\delta=\frac{\varepsilon}{7}$ (eller mindre), så alla de x som uppfyller dubbelolikheten $0<|x-4|<\delta$ ger att $|(7x-25)-3|<\varepsilon$.

Uppgift 8. (a) Instängningssatsen används: Eftersom cos svänger mellan -1 och 1, så kan man uppskatta

$$-(x-1)^2\le(x-1)^2\cos\left(\frac{5}{x-1}\right)\le(x-1)^2.$$

Eftersom både $-(x-1)^2$ och $(x-1)^2$ går mot 0 då $x\to1$, så existerar gränsvärdet $\lim_{x\to1}(x-1)^2\cos\left(\frac{5}{x-1}\right)$ och blir lika med 0.

(b)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}}{\sin 2x}\cdot\frac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}} = \Big/\text{konjugatregeln}\Big/ \\
&= \frac{(3x+1)-(x+1)}{\sin 2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\frac{\sin 2x}{2x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}}.
\end{aligned}
$$

Då blir gränsvärdet

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}}{\sin 2x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{\sin 2x}{2x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}}\right) \\
&= \frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{\sqrt{3\cdot 0+1}+\sqrt{0+1}} = \frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

där standardgränsvärdet ”$\frac{\sin z}{z} \to 1$ då $z \to 0$” använts med $z = 2x$.

(c) Man tar reda på de dominerande faktorerna i täljaren och nämnaren och bryter ut dem:

$$
\frac{(4x+2)^2}{(x+1)^3-x^3} = \frac{16x^2+16x+4}{x^3+3x^2+3x+1-x^3} = \frac{16x^2+16x+4}{3x^2+3x+1} = \frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{16+\frac{16}{x}+\frac{4}{x^2}}{3+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}
$$

Således

$$
\lim_{x\to\infty}\frac{(4x+2)^2}{(x+1)^3-x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{16+\frac{16}{x}+\frac{4}{x^2}}{3+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{16+0+0}{3+0+0} = \frac{16}{3}\,.
$$

Uppgift 9. Den givna funktionen är kontinuerlig på de öppna intervallen $(-\infty, 0)$ samt $(0, \infty)$ eftersom de trigonometriska funktionerna samt polynom och kvoter är kontinuerliga (förutsatt att man inte delar med noll). Den enda problematiska punkten som behöver undersökas är $x = 0$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} 2\cos x = 2\cos 0 = 2; \\
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2 = 2; \\
f(0) &= 2\cos 0 = 2.
\end{aligned}
$$

De två ensidiga gränsvärdena existerar och båda är lika med $f(0)$, vilket gör att f är kontinuerlig i punkten $x = 0$.

Således är f kontinuerlig i alla punkter av sin definitionsmängd.