Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola

Lösningsförslag till tentamen
2018-01-12, 8:30–12:30

MVE425: Tekniskt basår – Matematik, del B

Uppgift 1. Kvadratroten är definierad endast för icke-negativa tal. Dessutom får man inte dela med noll. Det är alltså följande villkor som måste vara uppfyllda samtidigt:

$$3 - x \geq 0 \quad \text{och} \quad 4 - 2x \geq 0 \quad \text{och} \quad \sqrt{4 - 2x} \neq 0.$$

Dessa förenklas till

$$x \leq 3 \quad \text{och} \quad x \leq 2 \quad \text{och} \quad x \neq 2.$$

Till slut slås dessa tre villkor ihop till en enda olikhet, nämligen $x < 2$.

Svar: $D_g = (-\infty, 2)$.

OBS: Det är ett grovt fel att först förenkla funktionen till $g(x) = \sqrt{\frac{3-x}{2x-4}}$ och sedan ta fram definitionsmängden. Notera att definitionsmängden kan förändras när man förenklar funktionsuttrycket m.h.a. potenslagarna. I denna uppgift skulle definitionsmängden till den förenklade funktionen bestå av två intervall, nämligen $(-\infty, 2) \cup [3, \infty)$.

Uppgift 2. Uttrycket förenklas m.h.a. logaritmens definition och logaritmlagarna samt basbytet.

$$\begin{aligned}\lg(\ln e^{10}) + 2\lg 20 - \frac{\ln 4}{\ln 10} &= \lg(10) + \lg 20^2 - \lg 4 = 1 + \lg 400 - \lg 4 \\ &= 1 + \lg\left(\frac{400}{4}\right) = 1 + \lg 100 = 1 + \lg 10^2 = 1 + 2 = 3.\end{aligned}$$

Svar: 3.

Uppgift 3. (a) Börja med variabelbytet $t = e^x$. Man får en andragradsekvation som löses m.h.a. *pq*-formeln.

$$\begin{aligned}e^{2x} = 15 + 2e^x \quad &\Leftrightarrow \quad \big/ t = e^x \big/ \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = 15 + 2t \\ &\Leftrightarrow \quad t^2 - 2t - 15 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1^2 + 15} = 1 \pm 4 = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}\end{aligned}$$

Sedan bestämmer man x via bakåtsubstitution:

$e^x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln 5\,.$
$e^x = -3$ har ingen reell lösning ty exponentialfunktionens värde är alltid positivt.

Svar: Ekvationen har endast en reell lösning, $x = \ln 5$.

Anmärkning: Ifall man råkat lägga till komplex lösning $x = \ln 3 + i\pi$ som svarar mot $e^x = -3$ (respektive $x = \ln 3 + i(2k+1)\pi$ med $k \in \mathbb{Z}$), så kommer det godtas. Å andra sidan var detta inte meningen med uppgiften med tanke på att ekvationer av typen ”e^x = något komplext tal” inte har diskuterats i den här kursen.

(b) Man börjar med att ta fram mängden av alla de talen $x \in \mathbb{R}$ för vilka samtliga uttrycken i ekvationen är definierade. (Man får gärna strunta i detta steg förutsatt att man i slutet av uppgiften gör en ordentlig kontroll av de funna lösningarna.)

Logaritmfunktionen är definierad endast för positiva tal, vilket innebär att $x + 1 > 0$ och $8 - x > 0$ och $x > 0$. Dessa tre villkor kan förenklas och slås ihop till dubbelolikheten $0 < x < 8$.

Man tar exponentialfunktionen av båda leden vilket kommer att ge en andragradsekvation som löses som vanligt.

$$\ln(x+1) = \ln(8-x) - \ln x \quad \Leftrightarrow \quad \Big/\text{exp:funktionen omvändbar}\Big/ \quad \Leftrightarrow \quad e^{\ln(x+1)} = e^{\ln(8-x)-\ln x}$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 1 = \frac{8-x}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x = 8 - x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1^2 + 8} = -1 \pm 3 = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$$

Av dessa två rötter är det bara $x = 2$ som uppfyller dubbelolikheten $0 < x < 8$. Med andra ord är $x = -4$ en falsk rot.

Ifall man struntat i definitionsmängderna i början, så upptäcker man att $x = -4$ inte funkar m.h.a. prövning av de funna rötterna i den ursprungliga ekvationen:

Kontroll av $x = 2$:

$$VL = \ln(2+1) = \ln 3 \qquad HL = \ln(8-2) - \ln 2 = \ln\left(\frac{6}{2}\right) = \ln 3 \qquad VL = HL$$

Kontroll av $x = -4$:

$$VL = \ln(-4+1) = \ln(-3),\ \text{vilket är odefinierat, vilket gör att } x = -4 \text{ är falsk rot}$$

Svar: Ekvationen har endast en lösning, $x = 2$.

(c) Man börjar med att ta fram mängden av alla de vinklarna $v \in [\pi, 2\pi]$ för vilka samtliga uttrycken i ekvationen är definierade. (Man får gärna strunta i detta steg förutsatt att man i slutet av uppgiften gör en ordentlig kontroll av de funna lösningarna.) För att $\tan v$ är definierat, så krävs det att $v \neq \frac{3}{2}\pi$.

Sedan skrivs $\tan v$ om enligt dess definition, medan $\sin 2v$ m.h.a. dubbla vinkelns formel:

$$\tan v = \sin 2v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin v}{\cos v} = 2 \sin v \cos v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin v - 2 \sin v \cos^2 v}{\cos v} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin v \cdot \frac{1 - 2\cos^2 v}{\cos v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin v = 0 \\ \quad \text{eller} \\ 1 - 2\cos^2 v = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sin v = 0 \\ \quad \text{eller} \\ \cos v = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} v = 2k\pi \quad \text{eller} \quad v = \pi + 2k\pi \\ \quad \text{eller} \\ v = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{eller} \quad v = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

där $k \in \mathbb{Z}$. Det kvarstår att ta fram samtliga vinklar med lämpliga val på k så att vinkeln hamnar i det önskade intervallet $[\pi, 2\pi]$. Totalt får man följande lösningar:

$$v = 2\pi, \quad v = \pi, \quad v = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}, \quad v = -\frac{3}{4}\pi + 2\pi = \frac{5\pi}{4}\,.$$

Ifall man struntat i definitionsmängderna i början, så krävs det prövning av de funna rötterna i den ursprungliga ekvationen:

Kontroll av $v = 2\pi$: $VL = \tan(2\pi) = 0$ $HL = \sin(2 \cdot 2\pi) = \sin(4\pi) = 0$ $VL = HL$,
Kontroll av $v = \pi$: $VL = \tan(\pi) = 0$ $HL = \sin(2 \cdot \pi) = \sin(2\pi) = 0$ $VL = HL$,
Kontroll av $v = \frac{7}{4}\pi$: $VL = \tan(\frac{7}{4}\pi) = -1$ $HL = \sin(2 \cdot \frac{7}{4}\pi) = \sin(\frac{7}{2}\pi) = -1$ $VL = HL$,
Kontroll av $v = \frac{5}{4}\pi$: $VL = \tan(\frac{5}{4}\pi) = 1$ $HL = \sin(2 \cdot \frac{5}{4}\pi) = \sin(\frac{5}{2}\pi) = 1$ $VL = HL$.

Svar: Ekvationen har fyra lösningar i det angivna intervallet, $v = \pi, v = \frac{5}{4}\pi, v = \frac{7}{4}\pi, v = 2\pi$.

Uppgift 4. (a)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\ .$$

Alternativt:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \qquad \text{eller} \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Anm.: Det räcker att skriva upp endast en av de tre ovanstående varianterna.

(b) Se beviset i kursboken.

(c) Enligt cosinussatsen är $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Den givna olikheten $c^2 > a^2 + b^2$ medför att

$$\underbrace{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}_{=c^2} > a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad -2ab\cos\gamma > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\cos\gamma > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\gamma < 0\ .$$

Värdet av cosinus för vinkeln γ är negativt, så γ ligger i andra kvadranten, d.v.s. γ är trubbig. Således är triangeln trubbvinklig. V.S.B.

Uppgift 5. Enligt areasatsen är $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Värdet av $\sin\gamma$ bestäms m.h.a. trig:ettan:

$$\begin{aligned}
&\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\gamma = \pm\sqrt{1-\cos^2\gamma} \\
&\Leftrightarrow \quad \Big/ 0 < \gamma < 180^\circ \Rightarrow \sin\gamma > 0 \Big/ \quad \Leftrightarrow \quad \sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} \\
&\Rightarrow \quad \sin\gamma = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25-9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}\ .
\end{aligned}$$

Det kvarstår att sätta in värdena i areasatsen:

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \frac{4}{5} = 24\ \text{cm}^2.$$

Svar: Triangelns area är $24\ \text{cm}^2$.

Uppgift 6. HL skrivs i polär form:

$$w = -8i = |w|e^{i\phi}, \quad \text{där} \quad |w| = \sqrt{0^2 + (-8)^2} = \sqrt{64} = 8 \quad \text{och } \phi \text{ uppfyller } \begin{cases} \text{Re:} & 0 = 8\cos\phi, \\ \text{Im:} & -8 = 8\sin\phi. \end{cases}$$

Alltså $\cos\phi = 0$ och $\sin\phi = -1$, vilket uppfylls av (t.ex.) $\phi = \frac{3}{2}\pi$.

Den givna ekvationen lyder

$$(z+2)^3 = 8e^{i(1{,}5\pi + 2k\pi)}, \quad \text{där } k \in \mathbb{Z}.$$

Lösningarna ges av

$$(z+2) = \sqrt[3]{8}\, e^{i(1{,}5\pi+2k\pi)/3} = 2\, e^{i(0{,}5\pi+2k\pi/3)}, \quad \text{där } k \in \mathbb{Z}.$$

Det var en tredjegradare, så det finns tre stycken lösningar. Man sätter in $k = 0, 1, 2$ och inga fler behövs:

$$\begin{array}{lll} k=0: & z+2 = 2e^{i\pi/2} = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2i & \Rightarrow \quad z_1 = -2+2i. \\ k=1: & z+2 = 2e^{i7\pi/6} = 2(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi) = -\sqrt{3}-i & \Rightarrow \quad z_2 = -2-\sqrt{3}-i. \\ k=2: & z+2 = 2e^{i11\pi/6} = 2(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi) = \sqrt{3}-i & \Rightarrow \quad z_3 = -2+\sqrt{3}-i. \end{array}$$

Svar: Ekvationen har tre lösningar: $z_1 = -2+2i$; $z_2 = -2-\sqrt{3}-i$ och $z_3 = -2+\sqrt{3}-i$.

Uppgift 7. (a) Om man försöker sätta in $x = 1$, så får man ett obestämt uttryck "$\frac{0}{0}$". Bråket behöver alltså förenklas, t.ex. genom att förlänga det med konjugaten:

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{4x}-\sqrt{2x+2}} \cdot \frac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}} \cdot \frac{\sqrt{4x}+\sqrt{2x+2}}{\sqrt{4x}+\sqrt{2x+2}} \\ &\qquad = \frac{(3x+1)-(x+3)}{(4x)-(2x+2)} \cdot \frac{\sqrt{4x}+\sqrt{2x+2}}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}} = \frac{2x-2}{2x-2} \cdot \frac{\sqrt{4x}+\sqrt{2x+2}}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}} \\ &\qquad = \frac{\sqrt{4x}+\sqrt{2x+2}}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}} \end{aligned}$$

Nu har hela bråket blivit kontinuerligt och så kan man räkna ut

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{4x}-\sqrt{2x+2}} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{4x}+\sqrt{2x+2}}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}} = \frac{\sqrt{4\cdot 1}+\sqrt{2\cdot 1+2}}{\sqrt{3\cdot 1+1}+\sqrt{1+3}} = \frac{\sqrt{4}+\sqrt{4}}{\sqrt{4}+\sqrt{4}} = 1\,.$$

Svar: 1.

(b) Man bryter ut de dominerande potenserna av x. Observera dock att x är negativt, vilket innebär att $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{9x^2+2}}{(x+2)^2-(x-1)^2} &= \frac{\sqrt{9x^2+2}}{(x^2+4x+4)-(x^2-2x+1)} \\ &= \frac{\sqrt{9x^2+2}}{6x+3} = \frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}{x\cdot(6+\frac{3}{x})} = \frac{-x\cdot\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}{x\cdot(6+\frac{3}{x})} = -\frac{\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}{(6+\frac{3}{x})}\,. \end{aligned}$$

Därför blir

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^2+2}}{(x+2)^2-(x-1)^2} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}{(6+\frac{3}{x})} = -\frac{\sqrt{9+0}}{6+0} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Svar: $\frac{-1}{2}$.

Uppgift 8. (a) $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ svänger vilt mellan -1 och 1 då x närmar sig 0. Man kan alltså begränsa $\sin(\ldots)$ uppåt av 1 och nedåt av -1.

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x \text{ då } x > 0 \quad \text{medan} \quad -x \geq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq x \text{ då } x < 0.$$

Sammanställt blir det dubbelolikheten

$$-|x| \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x| \quad \text{för alla } x \neq 0.$$

Eftersom $-|x| \longrightarrow 0$ då $x \longrightarrow 0$ och samtidigt $|x| \longrightarrow 0$ då $x \longrightarrow 0$, så får man att gränsvärdet av det mellersta uttrycket i dubbelolikheten existerar och är lika med 0.

Svar: 0.

(b) Om $z = \frac{1}{x}$ och $x \longrightarrow \infty$, så $z \longrightarrow 0^+$.

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \Big/ z = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{z} \Big/ = \lim_{z\to 0^+} \frac{1}{z}\sin z = \lim_{z\to 0^+} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Svar: 1.

Uppgift 9. Den givna funktionen är en väl-definierad rationell funktion då $x < 1$, vilket innebär att den är kontinuerlig i intervallet $(-\infty, 1)$. Den givna funktionen är ett polynom då $x > 1$, vilket innebär att den är kontinuerlig i intervallet $(1, \infty)$. Det enda problematiska stället, som behöver undersökas, är alltså $x = 1$.

För att f blir kontinuerlig i punkten $x = 1$, så krävs det att $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$. Eftersom f definieras med olika formler till vänster och till höger om 1, så innebär detta att de ensidiga gränsvärdena vid $x = 1$ behöver undersökas och $\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$ krävs.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} (x+2) = 3, \\
f(1) &= a, \\
\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} (bx + 1) = b \cdot 1 + 1 = b + 1.
\end{aligned}$$

Det krävs alltså att $3 = a = b + 1$.

Svar: $a = 3$ och $b = 2$.