Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola

Lösningsförslag till tentamen
2018-02-17, 14:00–18:00

# MVE425: Tekniskt basår – Matematik, del B

**Uppgift 1.** Kvadratroten är definierad endast för icke-negativa tal. Det är alltså följande villkor som måste vara uppfyllt:

$$16 - x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 16 \geq x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \geq |x| \quad \Leftrightarrow \quad -4 \leq x \leq 4.$$

Svar: $D_h = [-4, 4]$.

**Uppgift 1** (alternativ lösning)**.** Olikheten $16 - x^2 \geq 0$ löses genom att faktoruppdela polynomet på VL m.h.a. konjugatregeln.

$$16 - x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (4 - x)(4 + x) \geq 0$$

Därefter sammanställer man en teckentabell:

| $x$ | | $-4$ | | $4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $4 - x$ | + | + | + | 0 | - |
| $4 + x$ | - | 0 | + | + | + |
| $(4 - x)(4 + x)$ | - | 0 | + | 0 | - |

Från teckentabellen läser man av att VL $\geq 0$ då $-4 \leq x \leq 4$.

**Uppgift 2.** (a) Antag att $a, b, x > 0$ samt $a, b \neq 1$. Då gäller det att

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Bevis: Sätt $z = \log_b x$. Enligt logaritmens definition är

$$z = \log_b x \quad \Leftrightarrow \quad x = b^z \quad \Leftrightarrow \quad \Big/ \text{logaritmera ekvationen} \Big/ \quad \Leftrightarrow \quad \log_a x = \log_a(b^z)$$
$$\Leftrightarrow \quad \Big/ \text{log:lagarna} \Big/ \quad \Leftrightarrow \quad \log_a x = z \log_a b \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Man har alltså uttryckt värdet på $z$ på två olika sätt. Således måste dessa två uttryck vara lika.
V.S.B.

(b) Antag att $x, y > 0$ och $0 < a \neq 1$ och $p \in \mathbb{R}$. Då gäller det att:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a(x^p) = p \log_a x, \qquad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$$

Bevis: Eftersom logaritmfunktionen och exponentialfunktionen är inversa till varandra, så gäller det att $z = a^{\log_a z}$ för alla positiva reella tal $z$. Således

$$a^{\log_a(xy)} = xy = x \cdot y = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = \Big/ \text{potenslagarna} \Big/ = a^{\log_a x + \log_a y}.$$

Ekvationen $a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a x + \log_a y}$ medför att exponenterna är lika (ty exponentialfunktionen är omvändbar) och därför $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$. V.S.B.

Logaritmlagen för en kvot bevisas analogt:

$$a^{\log_a(x/y)} = \frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = \Big/ \text{potenslagarna} \Big/ = a^{\log_a x - \log_a y} \,.$$

Ekvationen $a^{\log_a(x/y)} = a^{\log_a x - \log_a y}$ medför att exponenterna är lika (ty exponentialfunktionen är omvändbar) och därför $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$. V.S.B.

Logaritmlagen för en potens bevisas analogt:

$$a^{\log_a(x^p)} = x^p = (x)^p = \big(a^{\log_a x}\big)^p = \Big/ \text{potenslagarna} \Big/ = a^{p \log_a x} \,.$$

Ekvationen $a^{\log_a(x^p)} = a^{p \log_a x}$ medför att exponenterna är lika (ty exponentialfunktionen är omvändbar) och därför $\log_a(x^p) = p \log_a x$. V.S.B.

(c) Man börjar med att förenkla HL m.h.a. de riktiga logaritmlagarna:

$$\ln(2x+y) = 2\ln x + \ln y \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2x+y) = \ln(x^2 y) \quad \Leftrightarrow \quad \Big/ \ln \text{ är omvändbar} \Big/$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x + y = x^2 y \quad \Leftrightarrow \quad 2x = x^2 y - y \quad \Leftrightarrow \quad 2x = (x^2-1)y \quad \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{2x}{x^2-1} = y \,.$$

$(*)$ Om $x$ vore lika med $\pm 1$, så skulle den sista ekvivalensen fallera. Å andra sidan är det uppenbart att ekvationen $2x = (x^2-1)y$ inte löses av $x = \pm 1$ och så går det bra att dividera ekvationens båda led med $(x^2-1)$.

Villkoren $x > 0$ och $y > 0$ som ska gälla samtidigt för att alla uttrycken i den ursprungliga ekvationen "$\ln(2x+y) = 2\ln x + \ln y$" är definierade ger att

$$x > 0 \quad \& \quad \frac{2x}{x^2-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0 \quad \& \quad \frac{2x}{(x-1)(x+1)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1 \,.$$

Svar: Likheten $\ln(2x+y) = 2\ln x + \ln y$ är sann om $y = \frac{2x}{x^2-1}$, där $x > 1$ är godtyckligt.

**Uppgift 3.** (a) Börja med variabelbytet $t = 3^x$. Notera att $9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = t^2$. Man får en andragradsekvation som löses m.h.a. $pq$-formeln.

$$9^x + 2\cdot 3^x - 15 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Big/ t = e^x \Big/ \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + 2t - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1^2 + 15} = -1 \pm 4 = \begin{cases} 3 \\ -5 \end{cases}$$

Sedan bestämmer man $x$ via bakåtsubstitution:

$3^x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1\,.$

$3^x = -5$ har ingen reell lösning ty exponentialfunktionens värde är alltid positivt.

Svar: Ekvationen har endast en reell lösning, $x = 1$.

(b) Man börjar med att ta fram mängden av alla de vinklarna $v \in (\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$ för vilka samtliga uttrycken i ekvationen är definierade. (Man får gärna strunta i detta steg förutsatt att man i slutet av uppgiften gör en ordentlig kontroll av de funna lösningarna.) För att $\tan 2v$ är definierat, så krävs det att $v \neq \frac{3}{4}\pi$ och $v \neq \frac{5}{4}\pi$.

Sedan skrivs $\tan 2v$ om enligt dubbla vinkelns formel:

$$\begin{aligned}
\tan 2v = 3\tan v \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2\tan v}{1-\tan^2 v} = 3\tan v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\tan v}{1-\tan^2 v} - 3\tan v = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{2}{1-\tan^2 v} - 3\right)\tan v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2-3(1-\tan^2 v)}{1-\tan^2 v} \cdot \tan v = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{3\tan^2 v - 1}{1-\tan^2 v} \cdot \tan v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3\tan^2 v - 1 = 0 \\ \quad \text{eller} \\ \tan v = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \tan v = \pm 1/\sqrt{3} \\ \quad \text{eller} \\ \tan v = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} v = \pm\pi/6 + k\pi \\ \quad \text{eller} \\ v = 0 + k\pi, \end{cases}
\end{aligned}$$

där $k \in \mathbb{Z}$. Det kvarstår att ta fram samtliga vinklar med lämpliga val på $k$ så att vinkeln hamnar i det önskade intervallet $(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Totalt får man följande lösningar:

$$v = \frac{-\pi}{6} + \pi = \frac{5}{6}\pi, \qquad v = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7}{6}\pi, \qquad v = 0 + \pi = \pi\,.$$

Ifall man struntat i definitionsmängderna i början, så krävs det prövning av de funna rötterna i den ursprungliga ekvationen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Kontroll av $v = \frac{5}{6}\pi$: | $VL = \tan(\frac{5}{3}\pi) = -\sqrt{3}$ | $HL = 3\tan(\frac{5}{6}\pi) = -3/\sqrt{3} = -\sqrt{3}$ | $VL = HL$, |
| Kontroll av $v = \pi$: | $VL = \tan(2\pi) = 0$ | $HL = 3\tan(\pi) = 0$ | $VL = HL$, |
| Kontroll av $v = \frac{7}{6}\pi$: | $VL = \tan(\frac{7}{3}\pi) = \sqrt{3}$ | $HL = 3\tan(\frac{7}{6}\pi) = 3/\sqrt{3} = \sqrt{3}$ | $VL = HL$. |

Svar: Ekvationen har tre lösningar i det angivna intervallet, $v = \frac{5}{6}\pi, v = \pi, v = \frac{7}{6}\pi$.

**Uppgift 4.** Enligt sinussatsen är $\sin\alpha = (a/b)\sin\beta = (1/\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2}/2) = 1/2$. Således är $\alpha = 30^\circ$ eller $\alpha = 150^\circ$. Det kan dock inte vara $150^\circ$ eftersom $\alpha + \beta$ skulle bli $195^\circ$, vilket överskrider $180^\circ$. Därför är $\alpha = 30^\circ$. Sedan $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$. Det kvarstår att bestämma längden på sidan $c$. Man kan utnyttja sinussatsen en gång till:

$$\begin{aligned}
c &= \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\gamma = \frac{1}{1/2}\sin 105^\circ = 2\sin(60^\circ + 45^\circ) = 2\big(\sin 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 60^\circ\big) \\
&= 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \text{ dm.}
\end{aligned}$$

Svar: $\alpha = 30^\circ, \gamma = 105^\circ, c = (\sqrt{6}+\sqrt{2})/2$ dm.

**Uppgift 5** (via Eulers formler). Man ska ersätta $\sin x$ och $\cos x$ på VL med deras Eulers formler, d.v.s. $(e^{ix} - e^{-ix})/2i$ respektive $(e^{ix} + e^{-ix})/2$.

$$\begin{aligned}
4\sin^2 x \cos x &= 4 \cdot \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 \cdot \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = 4 \cdot \frac{e^{i2x} - 2 + e^{-i2x}}{-4} \cdot \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\
&= \frac{(2 - e^{i2x} - e^{-i2x})(e^{ix} + e^{-ix})}{2} = \frac{(e^{ix} + e^{-ix}) - (e^{i3x} + e^{-i3x})}{2} = \cos x - \cos 3x, \qquad \text{V.S.B.}
\end{aligned}$$

**Uppgift 5** (via trig:ettan och Eulers formler)**.** Man ska ersätta $\sin^2 x$ enligt trig:ettan och det uppkomna $\cos^3 x$ på VL förenklas via Eulers formel för cosinus och kuberingsregeln.

$$\begin{aligned}
4\sin^2 x\cos x &= 4(1-\cos^2 x)\cos x = 4\cos x - 4\cos^3 x = 4\cos x - 4\Big(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\Big)^3\\
&= 4\cos x - 4\cdot\frac{e^{i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{i3x}}{8} = 4\cos x - \Big(\frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2} + 3\cdot\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\Big)\\
&= 4\cos x - (\cos 3x + 3\cos x) = \cos x - \cos 3x, \qquad \text{V.S.B.}
\end{aligned}$$

**Uppgift 5** (via de Moivres formel)**.** Man skriver om $\cos 3x$ m.h.a. de Moivres formel och trig:ettan:

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \operatorname{Re} e^{i3x} = \operatorname{Re}\big((e^{ix})^3\big) = \operatorname{Re}(\cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x)\\
&= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x = \cos x(1-\sin^2 x) - 3\cos x\sin^2 x = \cos x - 4\cos x\sin^2 x.
\end{aligned}$$

Detta uttryck sätts in i den önskade likhetens högerled:

$$HL = \cos x - \cos 3x = \cos x - (\cos x - 4\cos x\sin^2 x) = 4\cos x\sin^2 x = VL, \qquad \text{V.S.B.}$$

**Uppgift 6.** HL skrivs i polär form:

$$w = -4 = |w|e^{i\phi}, \quad \text{där} \quad |w| = \sqrt{4^2+0^2} = \sqrt{16} = 4 \quad \text{och } \phi \text{ uppfyller } \begin{cases}\text{Re:} & -4 = 4\cos\phi,\\ \text{Im:} & 0 = 4\sin\phi.\end{cases}$$

Alltså $\cos\phi = -1$ och $\sin\phi = 0$, vilket uppfylls av (t.ex.) $\phi = \pi$.

Den givna ekvationen lyder

$$(z-i)^4 = 4e^{i(\pi+2k\pi)}, \quad \text{där } k\in\mathbb{Z}.$$

Lösningarna ges av

$$(z-i) = \sqrt[4]{4}\,e^{i(\pi+2k\pi)/4} = \sqrt{2}\,e^{i(\pi/4+k\pi/2)}, \quad \text{där } k\in\mathbb{Z}.$$

Det var en fjärdegradare, så det finns fyra stycken lösningar. Man sätter in $k = 0, 1, 2, 3$ och inga fler behövs:

$k=0$: $\quad z-i = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4} = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 1+i \quad\Rightarrow\quad z_1 = 1+2i.$

$k=1$: $\quad z-i = \sqrt{2}\,e^{i3\pi/4} = \sqrt{2}\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = -1+i \quad\Rightarrow\quad z_2 = -1+2i.$

$k=2$: $\quad z-i = \sqrt{2}\,e^{i5\pi/4} = \sqrt{2}\,(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = -1-i \quad\Rightarrow\quad z_3 = -1.$

$k=3$: $\quad z-i = \sqrt{2}\,e^{i7\pi/4} = \sqrt{2}\,(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}) = 1-i \quad\Rightarrow\quad z_4 = 1.$

Svar: Ekvationen har fyra lösningar: $z_1 = 1+2i$; $z_2 = -1+2i$, $z_3 = -1$ och $z_4 = 1$.

**Uppgift 7.** (a) Om man försöker sätta in $x = 3$, så får man ett obestämt uttryck "$\frac{0}{0}$". Bråket behöver alltså förenklas, t.ex. genom att förlänga det med täljarens konjugat och genom att faktoruppdela nämnaren:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3x-5}-\sqrt{x+1}}{x^2-5x+6}\cdot\frac{\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1}} &= \frac{(3x-5)-(x+1)}{(x^2-5x+6)(\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1})}\\
&= \frac{2x-6}{(x-2)(x-3)(\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1})} = \frac{2\cancel{(x-3)}}{(x-2)\cancel{(x-3)}(\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1})}
\end{aligned}$$

Nu har hela bråket blivit kontinuerligt och så kan man beräkna

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{3x-5}-\sqrt{x+1}}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 3} \frac{2}{(x-2)(\sqrt{3x-5}+\sqrt{x+1})}$$
$$= \frac{2}{(3-2)(\sqrt{3\cdot 3-5}+\sqrt{3+1})} = \frac{2}{1\cdot(\sqrt{4}+\sqrt{4})} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\,.$$

Svar: $\frac{1}{2}$.

(b) Om $x \to -\infty$, så kommer uttrycket bli det obestämda "$-\infty + \sqrt{+\infty}$". Man ska alltså först förlänga med konjugatet och sedan bryta ut de dominerande potenserna av $x$. Observera dock att $x$ är negativt, vilket innebär att $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

$$\left(x+\sqrt{x^2-4x+1}\right)\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-4x+1}}{x-\sqrt{x^2-4x+1}} = \frac{x^2-(x^2-4x+1)}{x-\sqrt{x^2-4x+1}}$$
$$= \frac{4x-1}{x-|x|\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{4x-1}{x+x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{\cancel{x}\cdot(4-\frac{1}{x})}{\cancel{x}\cdot(1+\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}})}$$

Därför blir

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-4x+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{4-\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{4-0}{1+\sqrt{1-0+0}} = \frac{4}{2} = 2.$$

Svar: 2.

**Uppgift 8** (instängningssatsen). Sätt $t = 2x^2$ i dubbelolikheten, vilket ger

$$1+2x^2 \le e^{2x^2} \le 1+2x^2+4x^4 \quad\Rightarrow\quad 2x^2 \le e^{2x^2}-1 \le 2x^2+4x^4 \quad\Rightarrow\quad 2 \le \frac{e^{2x^2}-1}{x^2} \le 2+4x^2$$

Eftersom $VL = 2 \to 2$ då $x \to 0$ och samtidigt $HL = 2+4x^2 \to 2$ då $x \to 0$, så får man att gränsvärdet av det mellersta uttrycket i dubbelolikheten existerar och är lika med 2 enligt instängningssatsen.

**Uppgift 8** (variabelbyte). Man kan strunta i dubbelolikheten och utnyttja variabelbyte $z = 2x^2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-1}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-1}{2x^2} = \Bigg/ \begin{array}{c} z = 2x^2 \\ z \to 0^+ \text{ omm } x \to 0 \end{array} \Bigg/ = 2\lim_{z\to 0^+}\frac{e^z-1}{z} = 2\cdot 1 = 2\,,$$

där gränsvärdet $(e^z-1)/z \to 1$ ingår i definitionen av exponentialfunktionen med basen $e$.

**Uppgift 9.**

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 1} f(x) \text{ existerar ej}, \qquad f(1) = 1,$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 2} f(x) = 1, \qquad f(2) = 1{,}5.$$

**Uppgift 10.** Den givna funktionen är en väl-definierad kvot av en trigonometrisk funktion och ett polynom då $x < 0$, vilket innebär att den är kontinuerlig i intervallet $(-\infty, 0)$. Den givna funktionen är ett polynom då $0 \le x \le 2$, vilket innebär att den är kontinuerlig i det öppna intervallet

$(0,2)$. Den givna funktionen är en väl-definierad rationell funktion då $x > 2$, vilket innebär att den är kontinuerlig i intervallet $(2,\infty)$. De enda problematiska ställena, som behöver undersökas, är alltså $x = 0$ och $x = 2$.

För att $f$ blir kontinuerlig i punkten $x = 0$, så krävs det att $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Eftersom $f$ definieras med olika formler till vänster och till höger om $0$, så innebär detta att de ensidiga gränsvärdena vid $x = 0$ behöver undersökas och $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ krävs.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin 6x}{2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{3\sin 6x}{6x} = \left/ \begin{array}{c} z = 6x \\ z \longrightarrow 0^- \end{array} \right/ = 3 \lim_{z\to 0^-} \frac{\sin z}{z} = 3\cdot 1 = 3, \\
f(0) &= 0a + b = b, \\
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} (ax+b) = a\cdot 0 + b = b.
\end{aligned}$$

Det krävs alltså att $3 = b$.

För att $f$ blir kontinuerlig i punkten $x = 2$, så krävs det att $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$. Eftersom $f$ definieras med olika formler till vänster och till höger om $2$, så innebär detta att de ensidiga gränsvärdena vid $x = 2$ behöver undersökas och $\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$ krävs.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} (ax+b) = \lim_{x\to 2^-} (ax+3) = 2a+3, \\
f(2) &= 2a + b = 2a + 3, \\
\lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2^+} (x-1) = 2-1 = 1.
\end{aligned}$$

Det krävs alltså att $2a + 3 = 1$, vilket ger att $a = -1$.

Svar: $a = -1$ och $b = 3$.