Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola

Tentamen
2018-08-29, 8:30–12:30

MVE425: Tekniskt basår – Matematik, del B

Examinator: Lukáš Malý, tel. 031 - 772 53 42
Telefonvakt: Sandra Eriksson Barman, tel. 031 - 772 67 92
Hjälpmedel: Formler utdelade med tesen (tryckta på baksidan). Inga miniräknare är tillåtna.

Betygsgränser: För betyg 3 krävs 20 p; för betyg 4 krävs 32 p; för betyg 5 krävs 42 p (utav 50 p).
Lösningsförslag publiceras på kurshemsidan idag kl. 14:30.

OBS: Alla svar skall vara väl motiverade. Bristande motivering kommer att ge poängavdrag.

1. (a) Bestäm inversen till funktionen $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{4+x^2}\right)$ med $D_f = [0, \infty)$. (5p)

(b) Bestäm inversen till funktionen $g(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{4+x^2}\right)$ med $D_g = (-\infty, 0]$.

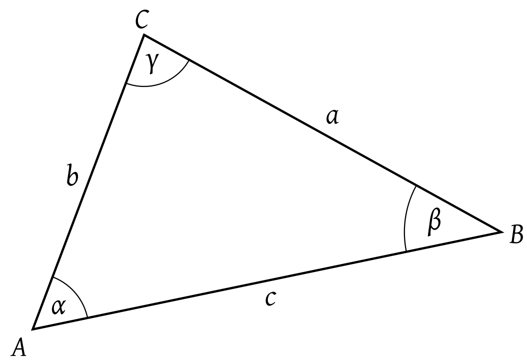
2. Lös följande ekvationer:

(a) $2^{x+2} + 2^{x-1} + 2^{x+1} = \dfrac{13}{8}$; (2p)

(b) $2\ln(t+1) = \ln(13^2 - t^2) - \ln(13 - t)$; (3p)

(c) $\sin(2v) = \cos\left(2v + \dfrac{\pi}{5}\right)$. Svara i radianer. (3p)

OBS: I uppgifter 3 (c) och 4 betecknas sidorna och vinklarna i triangeln ABC enligt figuren nedan:



3. (a) Formulera areasatsen. (2p)

(b) Bevisa areasatsen. I beviset ska du anta att vinkeln i formeln är trubbig. (5p)

(c) Antag att $a \leq b \leq c$ och att T betecknar triangelns area. Bevisa följande påstående:
Om $T < \frac{1}{2}ab$, så är triangeln inte rätvinklig. (2p)

4. Solvera triangeln ABC då $c = 5$ cm, $\alpha = 30^\circ$ och $\beta = 45^\circ$. (Arean krävs ej.) (5p)

5. Förenkla $\dfrac{(i-1)^8(\sqrt{3}+i)^7}{(1-i\sqrt{3})^{10}}$. Svaret ska anges på rektangulär form, d.v.s. som $x + iy$. (4p)

Var god vänd!

6. Ekvationen $z^3 + z^2 - z + 15 = 0$ har roten $1 + 2i$. Bestäm alla rötterna. (4p)

7. Beräkna följande gränsvärden: (3p + 3p)

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+4} - \sqrt{4-x}}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 6x + 3}\right).$$

8. Logaritmfunktionen uppfyller dubbelolikheten

$$\sin x - \sin^2 x \le \ln(1+x) \le \sin x \qquad \text{för alla } x \in \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right).$$

Utnyttja gärna denna dubbelolikhet till att bestämma

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin(2x)}.$$ (3p)

9. Bestäm de reella talen a och b så att funktionen (6p)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} & \text{då } 0 < x < 1, \\ a\sqrt{x} + bx & \text{då } 1 \le x \le 4, \\ \dfrac{8 - 4\sqrt{x}}{4 - x} & \text{då } x > 4 \end{cases}$$

blir kontinuerlig på intervallet $(0, \infty)$.

Lycka till!

Additions- och subtraktionsformlerna för de trigonometriska funktionerna

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Formler för dubbla vinkeln

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad \tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

Värden av sinus och cosinus för några ovanliga vinklar

Tabellen har utelämnats. I den här tentan är det endast en lite ovanlig vinkel som behövs, men dess sin- och cos-värden kan lätt beräknas med hjälp av additions- och subtraktionsformlerna ovan.