Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola

Lösningsförslag till tentamen
2018-08-29, 8:30–12:30

MVE425: Tekniskt basår – Matematik, del B

Uppgift 1. Man utgår från sambandet $y = \tan\left(\frac{\pi}{4+x^2}\right)$ och löser ut x:

$$y = \tan\left(\frac{\pi}{4+x^2}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \arctan y = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4+x^2}\right)\right) \quad\overset{!!!}{\Leftrightarrow}\quad \arctan y = \frac{\pi}{4+x^2}$$
$$\overset{(!)}{\Leftrightarrow}\quad 4+x^2 = \frac{\pi}{\arctan y} \quad\Leftrightarrow\quad x^2 = \frac{\pi}{\arctan y} - 4 \quad\Leftrightarrow\quad x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{\arctan y} - 4}\,.$$

Det är två steg ovan som inte är självklara. I det steg som markerats med ”!!!” använde man att $\arctan(\tan\theta) = \theta$, vilket endast är sant då vinkeln θ ligger mellan $-\pi/2$ och $\pi/2$. Uttrycket $\frac{\pi}{4+x^2}$ är positivt och mindre än $\frac{\pi}{4}$, så arctan och tan verkligen tar ut varandra.

I det steg som markerats med ”(!)” krävs det att man inte delar med noll. Man behöver alltså veta att $\arctan y \neq 0$, vilket gäller omm $y \neq 0$. För $\frac{\pi}{4+x^2} \in (0, \frac{\pi}{4}]$, är $y = \tan\left(\frac{\pi}{4+x^2}\right) \in (0, 1]$.

(a) Det var givet att $x \geq 0$ och så är det den positiva kvadratroten som plockas fram:

$$f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{\pi}{\arctan y} - 4}\,, \quad y \in (0, 1].$$

(b) Det var givet att $x \leq 0$ och så är det den negativa kvadratroten som plockas fram:

$$g^{-1}(y) = -\sqrt{\frac{\pi}{\arctan y} - 4}\,, \quad y \in (0, 1].$$

Uppgift 2. (a) Med hjälp av potenslagar får man att

$$2^{x+2} + 2^{x-1} + 2^{x+1} = \frac{13}{8} \quad\Leftrightarrow\quad 4\cdot 2^x + \frac{1}{2}\cdot 2^x + 2\cdot 2^x = \frac{13}{8} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{13}{2}\cdot 2^x = \frac{13}{8}$$
$$\Leftrightarrow\quad 2^x = \frac{1}{4} \quad\Leftrightarrow\quad 2^x = \frac{1}{2^2} \quad\Leftrightarrow\quad 2^x = 2^{-2} \quad\Leftrightarrow\quad x = -2.$$

Svar: $x = -2$.

(b) Uttrycken i ekvationen är definierade då $(t+1) > 0$ och $(13^2 - t^2) > 0$ och $(13 - t) > 0$. Dessa förenklas till $t > -1$ och $|t| < 13$, vilket kan skrivas som ett enda intervall $t \in (-1, 13)$. Om man får någon lösning utanför detta intervall, så är den en falsk rot. (Om man struntat i definitionsmängderna i början, så måste man göra en ordentlig kontroll av de funna lösningarna!)

Enligt konjugatregeln är $13^2 - t^2 = (13-t)(13+t)$. Logaritmlagarna ger att

$$2\ln(t+1) = \ln(13^2 - t^2) - \ln(13-t) \quad\Leftrightarrow\quad \ln(t+1)^2 = \ln(13+t) + \ln(13-t) - \ln(13-t)$$
$$\Leftrightarrow\quad \ln(t^2+2t+1) = \ln(13+t) \quad\Leftrightarrow\quad \Big/\text{ln är omvändbar}\Big/ \quad\Leftrightarrow\quad t^2 + 2t + 1 = 13 + t$$
$$\Leftrightarrow\quad t^2 + t - 12 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad t_{1,2} = \frac{-1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12} = \frac{-1}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{-1}{2} \pm \frac{7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

Lösningen ”-4” ligger utanför intervallet $(-1, 13)$, så det är en falsk rot.

Svar: $t = 3$

(c) Sinus på VL ersätts med cosinus p.g.a. sambandet $\sin\alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.

$$\sin(2v) = \cos\left(2v + \frac{\pi}{5}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2v\right) = \cos\left(2v + \frac{\pi}{5}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 2v = 2v + \frac{\pi}{5} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, & \text{(Fall 1)} \\ \text{eller} \\ \frac{\pi}{2} - 2v = -2v - \frac{\pi}{5} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. & \text{(Fall 2)} \end{cases}$$

Fall 1: $$\frac{\pi}{2} - 2v = 2v + \frac{\pi}{5} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad 4v = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} - 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad 4v = \frac{3\pi}{10} - 2k\pi$$
$$\Leftrightarrow \quad v = \frac{3\pi}{40} - \frac{k\pi}{2}$$

Fall 2: $$\frac{\pi}{2} - 2v = -2v - \frac{\pi}{5} + 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} - 2k\pi \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \frac{7\pi}{10} - 2k\pi,$$

där den sista ekvationen aldrig kan vara sann för k är ett heltal. Således leder Fall 2 inte till några lösningar.

Svar: $v = \dfrac{3\pi}{40} + \dfrac{k\pi}{2}$, där $k \in \mathbb{Z}$.

Anmärkning: Det skulle kunna gå lika bra att ersätta cosinus på HL med sinus i början. En sådan ersättning skulle ge ekvationen $\sin(2v) = \sin\left(\dfrac{3\pi}{10} - 2v\right)$.

Uppgift 3. (a) $T = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ eller $T = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ eller $T = \frac{1}{2}ac\sin\beta$.

(b) Se Fall 2 av beviset i Avsnitt 3.2 i kursboken.

(c) *Indirekt bevis:* Skulle triangeln vara rätvinklig, så vore sidorna a och b dess kateter (ty $a \leq b \leq c$) och så bleve arean $T = \frac{1}{2}ab$, vilket dock strede mot förutsättningen att $T < \frac{1}{2}ab$. Triangeln kan alltså inte vara rätvinklig.

(c) *Direkt bevis:* Eftersom $a \leq b \leq c$, så gäller det att

$$T < \frac{1}{2}ab \leq \frac{1}{2}ac \leq \frac{1}{2}bc$$

Enligt areasatsen är $T = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ och så $\sin\gamma < 1$, $\sin\beta < 1$ och $\sin\alpha < 1$. Således $\gamma \neq 90^\circ$, $\beta \neq 90^\circ$ och $\alpha \neq 90^\circ$.

Uppgift 4. Summan av triangelns vinklar är 180°, så $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$. Sidorna a och b kan bestämmas m.h.a. sinussatsen, vilket kräver att man först beräknar $\sin\gamma$ m.h.a. additionsformeln.

$$\sin\gamma = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Sinussatsen ger

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \Rightarrow \quad a = c \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = 5 \cdot \frac{1/2}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4} = \frac{10}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2} \text{ cm}.$$

Sinussatsen används en gång till och då ger den att

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \Rightarrow \quad b = c \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 5 \cdot \frac{\sqrt{2}/2}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4} = \frac{10}{\sqrt{3} + 1} = \frac{5(\sqrt{3} - 1)}{2} \text{ cm}.$$

Svar: $\gamma = 105^\circ$, $\quad a = 2{,}5(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ cm $\quad$ och $\quad b = 2{,}5(\sqrt{3} - 1)$ cm.

Uppgift 5. Samtliga parenteser i bråket överförs till polär form:

$$|i-1| = \sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad i-1 = \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}\,.$$

$$|\sqrt{3}+i| = 2 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\pi/6}\,.$$

$$|1-i\sqrt{3}| = 2 \quad\Rightarrow\quad 1-i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right) = 2e^{-i\pi/3}\,.$$

Parentesernas potenser i bråket beräknas m.h.a. de Moivres formel.

$$\frac{(i-1)^8(\sqrt{3}+i)^7}{(1-i\sqrt{3})^{10}} = \frac{(\sqrt{2}e^{i3\pi/4})^8\,(2e^{i\pi/6})^7}{(2e^{-i\pi/3})^{10}} = 2^{8/2+7-10}e^{i(8\cdot 3\pi/4+7\cdot\pi/6-10\cdot(-\pi/3))} = 2^1e^{i63\pi/6}$$

$$= 2\Big(\cos\big(10{,}5\,\pi\big) + i\sin\big(10{,}5\,\pi\big)\Big) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\Big(0+i1\Big) = 2i\,.$$

Svar: $\dfrac{(i-1)^8(\sqrt{3}+i)^7}{(1-i\sqrt{3})^{10}} = 2i.$

Uppgift 6. Polynomet har endast reella koefficienter, så komplexkonjugatet av $1+2i$, d.v.s. $1-2i$, är också en rot till ekvationen. Tredje lösningen hittas då polynomet på VL divideras med de kända rotfaktorerna $(z-(1+2i))$ och $(z-(1-2i))$.

$$\frac{z^3+z^2-z+15}{(z-(1+2i))(z-(1-2i))} = \frac{z^3+z^2-z+15}{z^2-2z+5} = z+3.$$

Ekvationens vänsterled kan alltså faktoruppdelas $VL = (z-1-2i)(z-1+2i)(z+3)$, vilket visar att -3 är den tredje lösningen.

Svar: Ekvationen $z^3+z^2-z+15=0$ löses av $z_{1,2} = 1 \pm 2i$ och $z_3 = -3$.

Uppgift 7. (a) Bråket ska förlängas med nämnarens konjugat.

$$\frac{\sin 3x}{\sqrt{x+4}-\sqrt{4-x}} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{4-x}} = \frac{(\sin 3x)\cdot(\sqrt{x+4}+\sqrt{4-x})}{(x+4)-(4-x)}$$

$$= \frac{\sin 3x}{2x}\cdot(\sqrt{x+4}+\sqrt{4-x}) = \frac{3}{2}\cdot\underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{(\sqrt{x+4}+\sqrt{4-x})}_{\to\sqrt{0+4}+\sqrt{4-0}=4} \to \frac{3}{2}\cdot 1\cdot 4 = 6 \quad \text{då } x\to 0.$$

Svar: 6

(b) Det handlar om ett obestämt uttryck "$\infty - \infty$". Förlängning med konjugatet ger

$$\left(x-\sqrt{x^2+6x+3}\right)\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+6x+3}}{x+\sqrt{x^2+6x+3}} = \frac{x^2-(x^2+6x+3)}{x+\sqrt{x^2+6x+3}} = \frac{-6x-3}{x+\sqrt{x^2+6x+3}}\,.$$

När man bryter ut de dominerande faktorerna, så fås att

$$\frac{-6x-3}{x+\sqrt{x^2+6x+3}} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\cdot\frac{-6-\frac{3}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}}} \to \frac{-6-0}{1+\sqrt{1+0+0}} = -3 \quad \text{då } x\to\infty.$$

Svar: -3

Uppgift 8. När den givna dubbelolikheten divideras med $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, så får man att

$$\underbrace{\frac{\sin x - \sin^2 x}{2\sin x\cos x}}_{=\frac{1-\sin x}{2\cos x}} \leq \frac{\ln(1+x)}{\sin 2x} \leq \underbrace{\frac{\sin x}{2\sin x\cos x}}_{=\frac{1}{2\cos x}} \qquad \text{då } 0 < x < \frac{1}{2}.$$

Eftersom

$$\frac{1-\sin x}{2\cos x} \longrightarrow \frac{1-0}{2\cdot 1} = \frac{1}{2} \quad \text{då } x \longrightarrow 0^+ \qquad \text{medan} \qquad \frac{1}{2\cos x} \longrightarrow \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2} \quad \text{då } x \longrightarrow 0^+,$$

ger instängningssatsen högergränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin 2x} = \dfrac{1}{2}$.

För att bestämma vänstergränsvärdet, så behöver man vända på olikhetstecknen när dubbelolikheten divideras med $\sin 2x$ eftersom $\sin 2x$ då är negativt.

$$\underbrace{\frac{\sin x - \sin^2 x}{2\sin x\cos x}}_{=\frac{1-\sin x}{2\cos x}} \geq \frac{\ln(1+x)}{\sin 2x} \geq \underbrace{\frac{\sin x}{2\sin x\cos x}}_{=\frac{1}{2\cos x}} \qquad \text{då } \frac{-1}{2} < x < 0.$$

Eftersom

$$\frac{1-\sin x}{2\cos x} \longrightarrow \frac{1-0}{2\cdot 1} = \frac{1}{2} \quad \text{då } x \longrightarrow 0^- \qquad \text{medan} \qquad \frac{1}{2\cos x} \longrightarrow \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2} \quad \text{då } x \longrightarrow 0^-,$$

ger instängningssatsen vänstergränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin 2x} = \dfrac{1}{2}$.

De två ensidiga gränsvärdena är lika, så gränsvärdet existerar och är lika med $\frac{1}{2}$.

Svar: $\frac{1}{2}$

Uppgift 9. Rationella funktioner samt kvadratroten är kontinuerliga på sina definitionsmängder, vilket innebär att funktionen f är kontinuerlig på intervallen $(0,1)$, $(1,4)$ och $(4,\infty)$ oavsett vilka värden a och b har. Man behöver alltså undersöka brytningspunkterna $x = 1$ respektive $x = 4$. För att få kontinuiteten i dessa två punkter, krävs det att $\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$ och $\lim_{x\to 4^-} f(x) = f(4) = \lim_{x\to 4^+} f(x)$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{x\cancel{(x-1)}} = \frac{1+2}{1} = 3$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (a\sqrt{x} + bx) = a\sqrt{1} + b\cdot 1 = a + b = f(1) \qquad \Rightarrow \qquad a + b = 3$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (a\sqrt{x} + bx) = a\sqrt{4} + b\cdot 4 = 2a + 4b = f(4)$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \frac{8-4\sqrt{x}}{4-x} = \lim_{x\to 4^+} \frac{\cancelto{16}{64-16x}}{\cancel{(4-x)}(8+4\sqrt{x})} = \frac{16}{8+4\sqrt{4}} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 2a + 4b = 1$$

Ekvationssystemet $\begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + 4b = 1 \end{cases}$ löses av $a = 5{,}5$ och $b = -2{,}5$.

Svar: $a = 5{,}5$ och $b = -2{,}5$.