Problem 1.1

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+3}{x+1} = 2 + \dfrac{1}{x+1} & \text{då } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{2x+3}{-x+1} = -2 + \dfrac{5}{-x+1} = -2 - \dfrac{5}{x-1} & \text{då } x \leq 0 \end{cases}$$

Således är f strängt växande till vänster om y-axeln, medan f är strängt avtagande till höger om y-axeln.

$\therefore$ f är inte injektivt i närheten av $x=0$.

(a) f kan restringeras till intervallet $[0,\infty)$:

$$y = 2 + \frac{1}{x+1} \iff y-2 = \frac{1}{x+1} \iff \frac{1}{y-2} = x+1$$

$$\iff \frac{1}{y-2} - 1 = x \iff \boxed{\frac{3-y}{y-2} = x}$$

Eftersom man utgått från att $x \geq 0$, så får man reda på vilka värden på y som är tillåtna genom att lösa olikheten $\dfrac{3-y}{y-2} \geq 0$

$\therefore$ $g^{-1}(y) = \dfrac{3-y}{y-2}$, där $y \in (2,3]$

$g = f|_{[0,\infty)}$

(b) f kan restringeras till intervallet $(-\infty, 0]$:

$$y = -2 - \frac{5}{x-1} \iff y+2 = \frac{-5}{x-1} \iff \frac{1}{y+2} = \frac{x-1}{-5}$$

$$\iff \frac{-5}{y+2} = x-1 \iff \frac{-5}{y+2} + 1 = x \iff \boxed{\frac{y-3}{y+2} = x}$$

De tillåtna värdena på y bestäms från olikheten

$\dfrac{y-3}{y+2} \leq 0$ $\quad\therefore$ $h^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{y+2}$, där $y \in (-2,3]$

$h = f|_{(-\infty,0]}$

Problem 1.21

(a) $y = \dfrac{1}{1+f(x)} \iff \dfrac{1}{y} = 1+f(x) \iff \dfrac{1}{y} - 1 = f(x)$

$\iff f^{-1}\left(\frac{1}{y}-1\right) = x$

Eftersom $f: [0,\infty) \to \underbrace{[0,\infty)}_{\mathcal{D}_{f^{-1}} = V_f \,!}$, måste uttrycket

$\frac{1}{y} - 1$ tillhöra intervallet $[0,\infty)$.

$\frac{1}{y} - 1 \geq 0$ uppfylls av $y \in (0,1]$

$\therefore \quad g^{-1}(y) = f^{-1}\left(\frac{1}{y}-1\right)$ där $y \in (0,1]$

(b) $y = f(x^2) \iff f^{-1}(y) = x^2 \iff \pm\sqrt{f^{-1}(y)} = x$

g är ej omvändbar

Om g restringeras till intervallet $[0,\infty)$, så blir $g^{-1}(y) = \sqrt{f^{-1}(y)}$ där $y \in [0,\infty)$

Om g däremot restringeras till intervallet $(-\infty, 0]$, så blir $g^{-1}(y) = -\sqrt{f^{-1}(y)}$, där $y \in \cancel{(-\infty, 0]}$ $[0,\infty)$

(c) $y = (f(x))^2 \iff \sqrt{y} = f(x) \iff f^{-1}(\sqrt{y}) = x$

det var givet att $f(x) \geq 0$ för alla x
Således är det inte $\pm\sqrt{y}$ på VL, utan bara $+\sqrt{y}$

$\therefore \quad g^{-1}(y) = f^{-1}(\sqrt{y})$, där $y \in [0,\infty)$

Problem 1.31

$$y = \frac{x-a}{bx-c} \quad (\text{där } bx-c \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad y(bx-c) = x-a \quad \Leftrightarrow \quad ybx - yc = x - a$$

$$\Leftrightarrow \quad ybx - x = yc - a \quad \Leftrightarrow \quad x\cdot(yb-1) = yc - a$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{yc-a}{yb-1}$$

$$\therefore \quad f^{-1}(x) = \frac{xc-a}{xb-1}$$

Man vill finna $a, b, c \in \mathbb{R}$ sådana att $f(x) = f^{-1}(x)$,

d.v.s. $$\frac{x-a}{bx-c} = \frac{xc-a}{xb-1} \quad \Leftrightarrow \quad (x-a)(xb-1) = (xc-a)(bx-c)$$

$$\Leftrightarrow \quad bx^2 - abx - x + a = bcx^2 - abx - c^2x + ac$$

Jämför koefficienterna vid motsvarande potenser av x:

x^2: $\quad b = bc \quad$ (I)

x^1: $\quad -ab-1 = -ab-c^2 \quad$ (II)

x^0: $\quad a = ac \quad$ (III)

(II) $\Leftrightarrow \quad c^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = \pm 1.$

Fall 1 – $c=1$: (I) blir $b=b$, (III) blir $a=a$ — vilket är uppfyllt för alla $a, b \in \mathbb{R}$

Lösning 1: $a, b \in \mathbb{R}$ godtyckliga, men $c = 1$

alltså $f(x) = \dfrac{x-a}{bx-1} = f^{-1}(x)$

Fall 2 – $c=-1$: (I) blir $b = -b \Rightarrow b = 0$

(II) blir $a = -a \Rightarrow a = 0$

Lösning 2: $a = b = 0$ o $c = -1$, alltså $f(x) = x$

Problem 1.4

(a) Antag att $s > t$. Då är $f(s) > f(t)$, ty f är str. växande.

$$f(s) > f(t) \overset{+g(s)}{\iff} f(s) + g(s) > \underbrace{f(t) + \underbrace{g(s)}_{>g(t)}}_{>f(t)+g(t)}$$ ty g är str. väx.

$$\Rightarrow \quad f(s) + g(s) > f(t) + g(t).$$

$\therefore$ $f+g$ är str. växande

(b) Monotonitet kan ändras om f och/eller g är negativt

Ex: $f(x) = g(x) = x \Rightarrow f(x) \cdot g(x) = x^2$ vilket är (str.) avtagande då $x < 0$

(c) Antag att $s > t$. Då är $z := g(s) > g(t) =: w$.
Eftersom f är strängt växande, så är $f(z) > f(w)$,
d. v. s. $f(g(s)) > f(g(t))$

$\therefore$ $f \circ g$ är str. växande.

(d-a) Antag att $s > t$. Då är $f(s) < f(t)$, ty f är str. avtagande

$$f(s) < f(t) \overset{+g(s)}{\iff} f(s) + g(s) < \underbrace{f(t) + \underbrace{g(s)}_{<g(t)}}_{<f(t)+g(t)}$$ ty g är avtagande

$$\Rightarrow \quad f(s) + g(s) < f(t) + g(t)$$

$\therefore$ $f+g$ är str. avtagande

(d-b) Monotonitet kan ändras om f och/eller g är negativt

Ex: $f(x) = g(x) = -x \Rightarrow f(x) \cdot g(x) = x^2$ vilket växer då $x \geq 0$

(d-c) Ex: $f(x) = g(x) = -x \Rightarrow f(g(x)) = -(-x) = x$ vilket är str. växande