Problem 2.1(

$$y = 3 - e^{2x} + 2e^{x} \iff \left| \begin{matrix} \text{variabelbyte} \\ z = e^{x} \end{matrix} \right| \iff y = 3 - z^2 + 2z$$

$$\iff 0 = z^2 - 2z + y - 3$$

$$\iff z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-(y-3)} = 1 \pm \sqrt{4-y}$$

(a) om $x \geq 0$, så $z = e^{x} \geq e^{0} = 1$, alltså $z \geq 1$

Av de två rötterna ovan är det bara $1+\sqrt{4-y}$ som är större än (el. lika med) 1.

$\therefore \quad z = 1 + \sqrt{4-y}$, där $4-y \geq 0$, alltså $y \leq 4$

$$z = e^{x} \Rightarrow e^{x} = 1 + \sqrt{4-y} \iff \boxed{\begin{matrix} x = \ln\left(1+\sqrt{4-y}\right) \\ \text{där } y \leq 4 \end{matrix}}$$

$\therefore \quad f^{-1}(x) = \ln\left(1+\sqrt{4-x}\right), \quad \mathcal{D}_{f^{-1}} = (-\infty, 4]$

(b) om $x \leq 0$, så $0 < z = e^{x} \leq e^{0} = 1$, alltså $0 < z \leq 1$

Av de två rötterna $z_{1,2}$ ovan är det bara $1-\sqrt{4-y}$ som kan ligga mellan 0 o 1.

$\therefore \quad z = 1 - \sqrt{4-y}$, där $4-y \geq 0$ (alltså $y \leq 4$)

o $1 - \sqrt{4-y} > 0$

$$1 - \sqrt{4-y} > 0 \iff 1 > \sqrt{4-y} \iff 1^2 > 4-y \geq 0$$
$$\iff -1 < y-4 \leq 0$$
$$\iff 3 < y \leq 4$$

$$z = e^{x} \Rightarrow e^{x} = 1 - \sqrt{4-y} \iff \boxed{\begin{matrix} x = \ln\left(1-\sqrt{4-y}\right) \\ \text{där } 3 < y \leq 4 \end{matrix}}$$

$\therefore \quad f^{-1}(x) = \ln\left(1-\sqrt{4-x}\right), \quad \mathcal{D}_{f^{-1}} = (3, 4]$

Problem 2.21 (i) $\ln(x+y) = \ln x + \ln y$

(a) $x=y=1 \rightsquigarrow$ $\left.\begin{array}{l} VL = \ln 2 \approx 0{,}693 \\ HL = \ln 1 + \ln 1 = 0 + 0 = 0 \end{array}\right\} VL \neq HL$

(b) $x=y=2 \rightsquigarrow$ $\left.\begin{array}{l} VL = \ln 4 = \ln 2^2 = 2\ln 2 \approx 1{,}386 \\ HL = \ln 2 + \ln 2 = 2\ln 2 \end{array}\right\} VL = HL$

(c) Förutsatt att $x>0$ o $y>0$:

$$\ln(x+y) = \ln x + \ln y \iff \ln(x+y) = \ln(x \cdot y)$$

$$\iff x+y = x\cdot y \iff x = x\cdot y - y \iff x = (x-1)\cdot y$$

$$\iff \boxed{y = \frac{x}{x-1}}$$

$y>0$ uppfylls om $\frac{x}{x-1} > 0$, vilket uppfylls om $x>1$ el. $x<0$. Vi har dock utgått från att $x>0$ och så kan det inte bli $x<0$.

$\therefore$ $\underline{y = \frac{x}{x-1} \text{ där } x>1}$

(ii) $\ln(x-y) = \ln x - \ln y$

(a) $x=2,\ y=1 \rightsquigarrow$ $\left.\begin{array}{l} VL = \ln(2-1) = \ln 1 = 0 \\ HL = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2 \approx 0{,}693 \end{array}\right\} VL \neq HL$

(b) $x=4,\ y=2 \rightsquigarrow$ $\left.\begin{array}{l} VL = \ln(4-2) = \ln 2 \\ HL = \ln 4 - \ln 2 = 2\ln 2 - \ln 2 = \ln 2 \end{array}\right\} VL = HL$

(c) Förutsatt att $x>0$, $y>0$ o $x-y>0$:

$$\ln(x-y) = \ln x - \ln y \iff \ln(x-y) = \ln\frac{x}{y} \iff x-y = \frac{x}{y}$$

$$\iff xy - y^2 = x \iff y^2 - xy + x = 0$$

$$\iff y_{1,2} = \frac{x}{2} \pm \frac{\sqrt{x^2-4x}}{2}$$ ... det krävs att $x^2-4x \geq 0$, så $x \geq 4$

Det är lätt att se att $y_{1,2} > 0$ o $x > y_{1,2}$ då.

$\therefore$ $y = \frac{x+\sqrt{x^2-4x}}{2}$ eller $y = \frac{x-\sqrt{x^2-4x}}{2}$, där $x \geq 4$.

(iii) $e^{x+y} = e^x + e^y$

(a) $x = y = 0$: $\left.\begin{array}{l} VL = e^{0+0} = e^0 = 1 \\ HL = e^0 + e^0 = 1+1 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow VL \neq HL$

(b) $x = y = \ln 2$: $\left.\begin{array}{l} VL = e^{\ln 2 + \ln 2} = e^{\ln 2} \cdot e^{\ln 2} = 2 \cdot 2 = 4 \\ HL = e^{\ln 2} + e^{\ln 2} = 2 + 2 = 4 \end{array}\right\} VL = HL$

(c) $e^{x+y} = e^x + e^y \iff e^x \cdot e^y - e^y = e^x \iff e^y \cdot (e^x - 1) = e^x$

$\iff e^y = \dfrac{e^x}{e^x - 1} \iff y = \ln \dfrac{e^x}{e^x - 1} \iff y = x - \ln(e^x - 1)$

det krävs att $e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$

$\therefore \quad y = x - \ln(e^x - 1)$, där $x > 0$

(iv) $e^{x-y} = e^x - e^y$

(a) $x = y = 0$: $\left.\begin{array}{l} VL = e^{0-0} = e^0 = 1 \\ HL = e^0 - e^0 = 1 - 1 = 0 \end{array}\right\} VL \neq HL$

(b) $x = \ln 4$, $y = \ln 2$: $\left.\begin{array}{l} VL = e^{\ln 4 - \ln 2} = e^{\ln 4} \div e^{\ln 2} = 4 \div 2 = 2 \\ HL = e^{\ln 4} - e^{\ln 2} = 4 - 2 = 2 \end{array}\right\} VL = HL$

(c) $e^{x-y} = e^x - e^y \iff \dfrac{e^x}{e^y} = e^x - e^y \iff e^x = e^x \cdot e^y - (e^y)^2$

$\iff$ / variabelbyte $z = e^y$ / $\iff e^x = e^x \cdot z - z^2$

$\iff 0 = z^2 - e^x \cdot z + e^x \iff z_{1,2} = \dfrac{e^x \pm \sqrt{e^{2x} - 4e^x}}{2}$

Det krävs att $e^{2x} - 4e^x \geq 0 \iff e^x \cdot (e^x - 4) \geq 0$

$\iff e^x \geq 4 \iff x \geq \ln 4$

$z = e^y \rightarrow y = \ln z$

$\therefore \quad y_{1,2} = \ln \dfrac{e^x \pm \sqrt{e^{2x} - 4e^x}}{2}$, där $x \geq \ln 4$

Problem 2.31

(i) $\ln x^p = (\ln x)^p$

(a) $x=e,\ p=2$: $\left.\begin{array}{l} VL = \ln e^2 = 2 \\ HL = (\ln e)^2 = 1^2 = 1 \end{array}\right\} VL \neq HL$

(b) $p=1,\ x>0$: $\left.\begin{array}{l} VL = \ln x \\ HL = \ln x \end{array}\right\} VL = HL$

(c) Förutsatt att $x>0$ ($x>1$ ifall p ej är heltal):

$$\ln x^p = (\ln x)^p \underset{(p\neq 0)}{\Longleftrightarrow} p\cdot \ln x = (\ln x)^p \Longleftrightarrow 0 = (\ln x)^p - p\ln x$$

$$\Longleftrightarrow 0 = \ln x \cdot \left((\ln x)^{p-1} - p\right) \Longleftrightarrow \ln x = 0 \text{ eller } (\ln x)^{p-1} = p$$

$\ln x = 0 \Longleftrightarrow \boxed{x=1}$ ... det krävs att $p>0$, ty annars är HL odefinierat

$(\ln x)^{p-1} = p \Longleftrightarrow \boxed{p=1}$ eller $\ln x = \sqrt[p-1]{p}$

$\boxed{x = e^{\sqrt[p-1]{p}}}$

$\therefore$ $p>0$ & $x=1$ el. $p=1$ & $x>0$

eller $p\neq 1$, $p \neq 0$ & $x = e^{\sqrt[p-1]{p}}$

ifall $p<0$, så måste p vara jämnt heltal

(ii) $(e^x)^p = e^{x^p}$

(a) $x=1,\ p=2$: $\left.\begin{array}{l} VL = (e^1)^2 = e^2 \approx 7{,}389 \\ HL = e^{1^2} = e^1 = e \approx 2{,}718 \end{array}\right\} \Rightarrow VL \neq HL$

(b) $x=p=1$: $\left.\begin{array}{l} VL = (e^1)^1 = e^1 = e \\ HL = e^{1^1} = e^1 = e \end{array}\right\} VL = HL$

(c) Förutsatt att $x>0$ ifall p ej är heltal.

$$(e^x)^p = e^{x^p} \Longleftrightarrow e^{xp} = e^{x^p} \Longleftrightarrow xp = x^p \Longleftrightarrow \begin{cases} p=1,\ x\in\mathbb{R} \\ x=0,\ p>0 \\ x = \sqrt[p-1]{p},\ p\neq 0,1 \end{cases}$$