Problem 4.1

$w = u + iv, \quad z = x + iy$

$w \cdot z = ux + ixv + iuy + i^2 vy$

$\quad = ux - vy + i \cdot (vx + uy)$

(a) $\operatorname{Re}(w \cdot z) = \operatorname{Re} w \cdot \operatorname{Re} z$

$\Leftrightarrow \quad ux - vy = ux$

$\Leftrightarrow \quad vy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0$ el. $y = 0$

Fall 1: om $\operatorname{Im} w = 0$ (dvs $w \in \mathbb{R}$), så får z vara ett godtyckligt komplext tal

Fall 2: om $\operatorname{Im} w \neq 0$, så måste $\operatorname{Im} z = 0$, dvs det krävs att $z \in \mathbb{R}$

Ex: (i) $w = 1+i \quad z = 1-i \quad w \cdot z = 2$

$\operatorname{Re}(wz) = 2 \neq \operatorname{Re} w \cdot \operatorname{Re} z = 1 \cdot 1 = 1$

(ii) $w = 1+i \cdot 2 \quad z = 3 \quad w \cdot z = 3 + 6i$

$\operatorname{Re}(wz) = 3 = \operatorname{Re}(w) \cdot \operatorname{Re}(z) = 1 \cdot 3$

(b) $\operatorname{Im}(w \cdot z) = \operatorname{Im} w \cdot \operatorname{Im} z$

$\Leftrightarrow \quad vx + uy = vy \quad \Leftrightarrow \quad vx = (v-u)y$

Fall 1: om $u = v = 0$ .... $0x = 0y \Rightarrow x$ o y godtyckl.

Fall 2: om $u = v \neq 0$ ... $vx = 0y \Rightarrow x = 0$ o y godtyckl.

Fall 3: om $u \neq v$ ... $y = \frac{v}{v-u} \cdot x$

Ex: (i) $w = 1 + 2i, \quad z = 1 - 2i, \quad w \cdot z = 5$

$\operatorname{Im}(w \cdot z) = 0 \neq \operatorname{Im}(w) \cdot \operatorname{Im}(z) = 2 \cdot (-2) = -4$

(ii) $w = 1 + 2i, \quad z = 2 + 4i, \quad w \cdot z = -6 + 8i$

$\operatorname{Im}(w \cdot z) = 8 = \operatorname{Im}(w) \cdot \operatorname{Im}(z) = 2 \cdot 4$

Problem 4.2 | Uttrycken på vardera ledet skrivs i polär form.

$$HL = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$VL = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)^n = \left(e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^n = e^{-in\frac{\pi}{6}}$$

Den givna ekvationen lyder då: $e^{-in\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

Absolutbeloppen måste vara lika (det är de) o argumenten måste vara lika eller skilja sig med något antal hela varv:

$$-n\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad \text{där } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad -n\pi = 6\cdot\frac{\pi}{3} + 12k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad -n\pi = 2\pi + 12k\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad -n = 2 + 12k \quad \Leftrightarrow \quad n = -2 - 12k$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{n = 12\tilde{k} - 2}, \text{ där } \tilde{k} \text{ är ett godtyckligt heltal.}$$

Problem 4.3 |

(a) Sätt $z = x + iy$.

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{x+1+iy}{x-1+iy}\cdot\frac{x-1-iy}{x-1-iy} = \frac{x^2-1-2iy-i^2y^2}{(x-1)^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-1-2iy}{(x-1)^2+y^2}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}$$

$$\therefore \quad \mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2-1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2 < 1$$

Olikheten beskriver den öppna utan randen cirkelskivan med medelpunkten i origo o radien 1.

(b) Rent geometrisk tolkning:

VL = avståndet från punkten $(1, 0)$

HL = (om icke-negativt) avståndet från den lodräta linjen $x = -1$

VL = HL $\Longleftrightarrow$ avståndet från en punkt är lika med avståndet från en linje

$\therefore$ Parabel! brännpunkten $= (1, 0)$

styrlinjen $= x = -1$

Algebraisk härledning:

Sätt $z = x + iy$.

$VL = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2}$

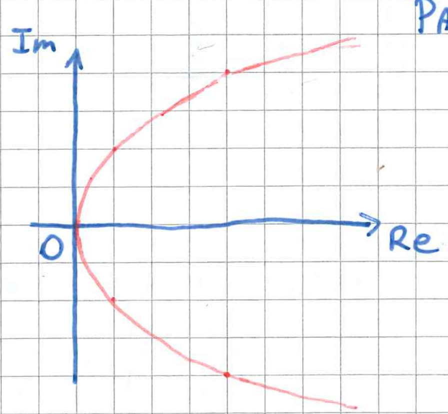
$HL = x + 1$

$VL = HL \Longleftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2} = x + 1 \quad |^2$

$\overset{x+1 \geq 0}{\Longleftrightarrow} \quad \cancel{x^2} - 2x + \cancel{1} + y^2 = \cancel{x^2} + 2x + \cancel{1}$

$\Longleftrightarrow \quad y^2 = 4x \quad \Longleftrightarrow \quad y = \pm 2\sqrt{x}$

PARABEL



Problem 4.4

$$x\cos 4v - 4\sqrt{x}\cos 2v + 4 = 0 \qquad (\mathrm{I})$$

$$x\sin 4v - 4\sqrt{x}\sin 2v - 2 = 0 \qquad (\mathrm{II})$$

$(\mathrm{I}) + i\cdot(\mathrm{II})$: $\quad x\cdot(\cos 4v + i\sin 4v) - 4\sqrt{x}(\cos 2v + i\sin 2v) + 4 - 2i = 0$

$$\Leftrightarrow \quad xe^{i4v} - 4\sqrt{x}\,e^{i2v} + 4 - 2i = 0$$

Sätt $z = \sqrt{x}\cdot e^{i2v}$. Då förvandlas ekvationen till

$$z^2 - 4z + 4 - 2i = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (z-2)^2 = 2i \qquad (*)$$

$$HL = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = \left(\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\cdot\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right)^2 = (1+i)^2$$

$$(*) \Leftrightarrow \quad (z-2)^2 = (1+i)^2 \Leftrightarrow z - 2 = \pm(1+i)$$

$$z = 2 \pm (1+i) \begin{cases} 3+i \\ 1-i \end{cases}$$

Fall 1: $\quad z = 3+i = \sqrt{10}\cdot e^{i\alpha}$, där $\alpha = \arctan\frac{1}{3}$

$$\sqrt{x}\,e^{i2v} = \sqrt{10}\cdot e^{i\alpha} \quad \underset{\text{ledenär i polär Form}}{\overset{\text{Båda}}{\Longleftrightarrow}} \quad \begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{10} \\ 2v = \alpha + 2n\pi, \; n\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x = 10 \;\&\; v = \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{3} + n\pi, \text{ där } n\in\mathbb{Z}$$

Fall 2: $\quad z = 1-i = \sqrt{2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$\sqrt{x}\,e^{i2v} = \sqrt{2}\cdot e^{-i\pi/4} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{2} \\ 2v = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi \\ \text{där } n\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x = 2 \;\&\; v = n\pi - \frac{\pi}{8}, \text{ där } n\in\mathbb{Z}$$

Problem 4.5

Låt $z = \cos 2 + i \sin 2 + 1$.

Dubbla vinkelns formler ger:

$$\operatorname{Re} z = \cos 2 + 1 = \underbrace{(2\cos^2 1 - 1)}_{=\cos 2} + 1 = 2\cos^2 1 \quad > 0$$

$$\operatorname{Im} z = \sin 2 = 2 \sin 1 \cos 1 \quad > 0$$

Talet z ligger i 1:a kvadranten $\Rightarrow$ $\operatorname{Arg} z = \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$

$$\operatorname{Arg} z = \arctan\left(\frac{\cancel{2} \sin 1 \cancel{\cos 1}}{\cancel{2} \cos^2 1}\right) = \arctan(\tan 1) = 1$$

$$|z| = \sqrt{(2\cos^2 1)^2 + (2\sin 1 \cos 1)^2} = \sqrt{4\cos^2 1 \cdot \underbrace{(\cos^2 1 + \sin^2 1)}_{\text{trig:ettan}}}$$

$$= \sqrt{4\cos^2 1} = 2\cos 1$$

Således är $z = \underbrace{2\cos 1}_{|z|} \cdot e^{i \cdot \overset{\swarrow \operatorname{Arg} z}{1}}$

Svar: $(\cos 2 + i \sin 2 + 1)^n = z^n = \underline{(2\cos 1)^n \cdot e^{in}}$, $n \in \mathbb{Z}$