MVE425: TEKNISKT BASÅR – MATEMATIK, DEL B
SVÅRARE UPPGIFTER

6 DECEMBER 2017

1. Funktionsbegreppet

Problem 1.1. Undersök om den reella funktionen

$$f(x) = \frac{2x+3}{|x|+1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

är omvändbar. Om så är fallet, bestäm dess inversa funktion. Om inte, välj någon lämplig restriktion och bestäm inversen till den restringerade funktionen.

Problem 1.2. Antag att funktionen $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ är omvändbar och dess invers betecknas av f^{-1}. Undersök om funktionen g är omvändbar och bestäm g:s invers i så fall, uttryckt m.h.a. f^{-1} om

$$\text{(a) } g(x) = \frac{1}{1+f(x)}, \quad x \geq 0; \qquad \text{(b) } g(x) = f(x^2), \quad x \in \mathbb{R}; \qquad \text{(c) } g(x) = f(x)^2, \quad x \geq 0.$$

T.ex. om $g(x) = f(x) - 2$, där $x \geq 0$, så är $g^{-1}(y) = f^{-1}(y+2)$, där $y \geq -2$.

Problem 1.3. För vilka reella konstanter a, b och c gäller att funktionen

$$f(x) = \frac{x-a}{bx-c}, \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : bx \neq c\},$$

är sin egen invers, d.v.s. att $f^{-1}(x) = f(x)$ för alla $x \in D_f$?

Problem 1.4. Antag att f och g båda är strängt växande reellvärda funktioner och definierade för alla reella tal. Är

$$\text{(a) } f+g, \qquad \text{(b) } fg, \qquad \text{(c) } f \circ g$$

nödvändigtvis strängt växande? Ange motexempel i annat fall.
(d) Lös (a)–(c) men med ”växande” utbytt mot ”avtagande”.

2. Exponential- och logaritmfunktionen

Problem 2.1. Bestäm inversen till $f(x) = 3 - e^{2x} + 2e^x$ vars definitionsmängd D_f ges av (a) $x \geq 0$; (b) $x \leq 0$.

Problem 2.2 (Falska räknelagar)**.** Endast i undantagsfall gäller att:

(i) $\ln(x+y) = \ln x + \ln y$; (ii) $\ln(x-y) = \ln x - \ln y$; (iii) $e^{x+y} = e^x + e^y$; (iv) $e^{x-y} = e^x - e^y$.

(a) För varje ”räknelag” ovan, ge exempel på tal x och y sådana att likheten **inte gäller**.
(b) För varje ”räknelag” ovan, ge exempel på tal x och y sådana att likheten **råkar gälla**. (Det kan behövas att man först löser deluppgiften (c).)
(c) För varje ”räknelag” ovan, försök lösa ut y. Bestäm på så sätt för vilka reella tal x det finns något reellt tal y så att likheten gäller.

Problem 2.3 (Falska räknelagar 2)**.** Endast i undantagsfall gäller att:

$$\text{(i) } \ln(x^p) = (\ln x)^p; \qquad \text{(ii) } (e^x)^p = e^{x^p}.$$

(a) För varje ”räknelag” ovan, ge exempel på tal x och p sådana att likheten **inte gäller**.
(b) För varje ”räknelag” ovan, ge exempel på tal x och p sådana att likheten **råkar gälla**. (Det kan behövas att man först löser deluppgiften (c).)
(c) För varje ”räknelag” ovan, försök lösa ut x. Bestäm på så sätt för vilka reella tal p det finns något reellt tal x så att likheten gäller.

3. De trigonometriska funktionerna

Problem 3.1 (Herons formel)**.** Bevisa Herons formel:

$$\text{Arean av } \triangle ABC = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}\,,$$

där a, b, c är triangelns sidolängder.

Tips: Utgå från areasatsen och använd cosinussatsen samt trig:ettan. För att kunna klara av faktoruppdelningen under rottecknet, så behöver man konjugat- och kvadreringsreglerna.

Anmärkning: Vanligtvis formulerar man Herons formel på följande sätt:

$$\text{Arean av } \triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,,$$

där $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ är triangelns semiperimeter, d.v.s. halva omkretsen.

Problem 3.2. Använd någon av de kända formlerna för trigonometriska funktioner för att bevisa likheten

$$\frac{\sin(u+v)+\sin(u-v)}{2} = \sin u \cos v$$

och sedan med hjälp av det formeln

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,.$$

Man kan också (på liknande sätt) härleda formlerna för $\sin\alpha - \sin\beta$ och $\cos\alpha \pm \cos\beta$.

Problem 3.3. Lös ekvationen $\tan 2v = 4\tan v$. Vid behov kan svaret innehålla något arcus-uttryck.

Problem 3.4. Bestäm vinklarna i en likbent triangel där tangens för vinkeln vid spetsen är 2 gånger sinus för en av de två lika vinklarna vid basen.

Problem 3.5. Antag att $\tan u = \dfrac{1}{7}$ och $\tan v = \dfrac{3}{4}$. Vilka värden kan vinkeln $u+v$ anta?

Problem 3.6. Antag att α, β och γ är de inre vinklarna i en triangel. Bevisa att

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\,.$$

Tips: $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$; $\quad \sin u = \sin(2\cdot\frac{u}{2})$; $\quad 1+\cos v = 1+\cos(2\cdot\frac{v}{2}) = \cdots = 2\cos^2\frac{v}{2}$.

Problem 3.7. Antag att triangeln ABC är likbent och sidan $c = AB$ bildar dess bas. Visa att

$$\text{(a) } c = 2a\cos\alpha; \qquad \text{(b) } c^2 = 2a^2(1-\cos\gamma)\,.$$

Problem 3.8. Antag att en pentagon (d.v.s. en regelbunden femhörning) är inskriven i en cirkel med radie $r = 4$ l.e. Bestäm pentagonens sidolängd, omkrets och area.
Lös uppgiften också för en allmän regelbunden k-hörning där $k \geq 3$.

4. De komplexa talen

Problem 4.1 (Falska räknelagar)**.** Antag att $w = u + iv$ är ett givet komplext tal. Bestäm sambandet mellan x och y i det komplexa talet $z = x + iy$ så att

$$\text{(a) } \mathrm{Re}\,(w\cdot z) = \mathrm{Re}\,(w)\cdot\mathrm{Re}\,(z); \qquad \text{(b) } \mathrm{Im}\,(w\cdot z) = \mathrm{Im}\,(w)\cdot\mathrm{Im}\,(z).$$

Finn några specifika exempel på talen w och z så att likheterna ovan (i) inte gäller, (ii) råkar gälla.

Problem 4.2. Bestäm samtliga möjliga värden på exponenten $n \in \mathbb{Z}$ sådana att

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Problem 4.3. Tolka geometriskt (o)likheten

$$\text{(a) } \mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) < 0; \qquad \text{(b) } |z-1| = \mathrm{Re}\,(z+1).$$

Med andra ord: bestäm vilken figur man får när talen $z = x + iy \in \mathbb{C}$ som uppfyller den givna (o)likheten tolkas som punkter i planet.
Obs: Det kommer att vara några kägelsnitt.

Problem 4.4. Finn alla reella talpar x, v som löser ekvationssystemet

$$\begin{cases} x\cos(4v) - 4\sqrt{x}\cos(2v) + 4 = 0 \\ x\sin(4v) - 4\sqrt{x}\sin(2v) - 2 = 0 \end{cases}$$

Obs: Det kommer att finnas två väldigt olika typer av talpar som löser ekvationen. Den ena typen kommer att ha snälla värden på v, medan den andra typen kommer att kräva att v uttrycks m.h.a. någon arcusfunktion.

Tips: Multiplicera andra ekvationen med i, sedan addera ekvationerna ihop, utnyttja $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$. En lämplig substitution kommer att förvandla ekvationen till en andragradare med komplexa koefficienter.

Problem 4.5. Antag att $n \in \mathbb{Z}$. Förenkla det komplexa talet $(\cos 2 + i\sin 2 + 1)^n$. Skriv ditt svar i polär form.

Tips: Dubbla vinkelns formler kommer att användas någonstans på vägen.

5. Gränsvärden

Problem 5.1. Beräkna följande gränsvärden:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{x^3}, \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{3 - 4\cos x + \cos 2x}{x^4}, \qquad \text{(c)} \lim_{x\to \pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\tan x\,.$$

Problem 5.2. Antag att m, n, p, q är positiva heltal. Bestäm:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}, \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[p]{x^m} - 1}{\sqrt[q]{x^n} - 1}.$$

Tips: Man kan relativt lätt bestämma gränsvärdet i (b) med hjälp av resultatet av (a) genom att göra variabelbytet $x = t^k$ med någon lämplig exponent k.

Problem 5.3. Räkna ut följande gränsvärden:

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{27} - (n+1)^{27}}{(2n^2+5)^{13} - (n^2-1)^{13}}, \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \frac{(n^3\cos n + n^2\sin n)^{100} - (n^3\sin n + n^2)^{100}}{(n^9 + n^5\cos n + n^2\sin n)^{34}}.$$

Tips: Det behövs inte att fullständigt utveckla parenteserna. Det räcker att bestämma vilka termer som blir största i täljaren och i nämnaren och strunta i allt annat.

Problem 5.4. Finn reella tal a och b sådana att gränsvärdet $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7^{\ln x}}{x^a} - bx\right)$ existerar och beräkna detta gränsvärde.

SVAR

1.1. f är inte omvändbar.
Restriktionen till $x \geq 0$ ger inversen $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2-y}$, där $y \in (2, 3]$.
Restriktionen till $x \leq 0$ ger inversen $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2+y}$, där $y \in (-2, 3]$.

1.2. (a) $g^{-1}(y) = f^{-1}(\frac{1}{y} - 1)$, där $y \in (0, 1]$.
(b) Restriktionen till $x \geq 0$ får inversen $g^{-1}(y) = \sqrt{f^{-1}(y)}$, där $y \in [0, \infty)$.
Restriktionen till $x \leq 0$ får inversen $g^{-1}(y) = -\sqrt{f^{-1}(y)}$, där $y \in [0, \infty)$.
(c) $g^{-1}(y) = f^{-1}(\sqrt{y})$, där $y \in [0, \infty)$.

1.3. $a = b = 0$ och $c = -1$, alltså $f(x) = x$; eller $c = 1$ medan $a, b \in \mathbb{R}$ godtyckliga, alltså $f(x) = \dfrac{x-a}{bx-1}$.

1.4. (a) Ja
(b) Nej, t.ex. $f(x) = -e^{-x}$, $g(x) = e^{2x}$. Då blir $f(x)g(x) = -e^{x}$, vilket är strängt avtagande
(c) Ja
(d-a) Ja
(d-b) Nej, t.ex. $f(x) = g(x) = -x$. Då blir $f(x)g(x) = x^2$, vilket är strängt avtagande för $x \leq 0$ men strängt växande för $x \geq 0$.
(d-c) Nej, t.ex. $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = -x$. Då blir $f(g(x)) = e^{x}$, vilket är strängt växande

2.1. (a) $f^{-1}(y) = \ln(1 + \sqrt{4-y})$, där $y \leq 4$.
(b) $f^{-1}(y) = \ln(1 - \sqrt{4-y})$, där $3 < y \leq 4$.

2.2. (i-a) $x = y = 1$ (i-b) $x = y = 2$; (i-c) $y = \dfrac{x}{x-1}$, där $x > 1$.

(ii-a) $x = 2, y = 1$ (ii-b) $x = 4, y = 2$ (ii-c) $y = \dfrac{x \pm \sqrt{x^2 - 4x}}{2}$, där $x \geq 4$

(iii-a) $x = y = 0$ (iii-b) $x = y = \ln 2$ (iii-c) $y = x - \ln(e^x - 1)$, där $x > 0$

(iv-a) $x = y = 0$ (iv-b) $x = \ln 4, y = \ln 2$ (iv-c) $y = \ln \dfrac{e^x \pm \sqrt{e^{2x} - 4e^x}}{2}$, där $x \geq \ln 4$

2.3. (i-a) $x = e, p \neq 1$ godtyckligt (i-b) $x = 1, p \in \mathbb{Z}^+$ godtyckligt
(i-c) $x = 1$ med $p > 0$; eller $p = 1$ och $x > 0$; eller $x = e^{p^{1/(p-1)}}$, där $0 < p \neq 1$

(ii-a) $x = 1, p \neq 1$ godtyckligt (ii-b) $x = p = 1$
(ii-c) $x = 0 < p$; eller $p = 1$ och $x \in \mathbb{R}$; eller $x = p^{1/(p-1)}$, där $1 \neq p \in \mathbb{R}$.

3.3. $v = k\pi$ eller $v = \pm \arctan(1/\sqrt{2}) + k\pi$, där $k \in \mathbb{Z}$.

3.4. $\alpha = \beta = \gamma = 60°$

3.5. $u + v = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ för något $k \in \mathbb{Z}$.

3.8. Pentagon: sidolängden $a = 8 \sin 36° = 2\sqrt{10 - \sqrt{20}}$ l.e., omkretsen $P = 5a = 10\sqrt{10 - \sqrt{20}}$ l.e., arean $A = 40 \sin 72° = 10\sqrt{10 + \sqrt{20}}$ a.e.
k-gon: sidolängden $a = 8 \sin \frac{180°}{k}$ l.e., omkretsen $P = k \cdot a = 8k \sin \frac{180°}{k}$ l.e., arean $A = 8k \sin \frac{360°}{k}$ a.e.

4.1. (a) Ifall w är ett reellt tal, så får $z \in \mathbb{C}$ vara godtyckligt.
Ifall w är ett icke-reellt tal, så måste $z \in \mathbb{R}$.
Ex: Likheten gäller inte för $w = 1 + i$, $z = 1 - i$. Den råkar gälla för $w = 2 + 3i$ och $z = 4$.

(b) Ifall $w = 0$, så får $z \in \mathbb{C}$ vara godtyckligt.
Ifall $\operatorname{Re} w = \operatorname{Im} w \neq 0$ (d.v.s. $u = v \neq 0$), så måste $z \in \mathbb{C}$ vara rent imaginärt, d.v.s. $\operatorname{Re} z = 0$ (d.v.s. $x = 0$).
Ifall $\operatorname{Re} w \neq \operatorname{Im} w$ (d.v.s. $u \neq v$), så krävs det att $\operatorname{Im} z = \frac{\operatorname{Im} w}{\operatorname{Im} w - \operatorname{Re} w} \cdot \operatorname{Re} z$ (d.v.s. $y = vx/(v-u)$).
Ex: Likheten gäller inte för $w = 3 + 4i$ och $z = 3 - 4i$. Den råkar gälla för $w = 1 + 3i$ och $z = 2 + 3i$.

4.2. $n = 12k - 2$, där $k \in \mathbb{Z}$.

4.3. (a) Den öppna cirkelskivan med medelpunkten i origo och radien 1.
Anmärkning: Öppna cirkelskivan = det område som begränsas av cirkeln, men själva cirkeln (alltså områdets rand) ingår INTE.

(b) Parabeln med brännpunkten i $(1, 0)$ och styrlinjen som ges av ekvationen $x = -1$ (alltså lodrät linje). Parabelns ekvation är $y^2 = 4x$.

4.4. $x = 2$ med $v = k\pi - \frac{\pi}{8}$, där $k \in \mathbb{Z}$, är den snälla massan lösningar.
$x = 10$ med $v = k\pi + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$, där $k \in \mathbb{Z}$, är den andra massan lösningar.

4.5. $(2\cos 1)^n e^{in}$, där $n \in \mathbb{Z}$.

5.1. (a) 1, (b) 1/2, (c) -1

5.2. (a) m/n, (b) $\frac{m/p}{n/q} = \frac{mq}{np}$

5.3. (a) 81/8191, (b) 0.

5.4. 3 möjliga lösningar: (i) $a > \ln 7$ och $b = 0$ gör att gränsvärdet blir 0;
(ii) $a = \ln 7$ och $b = 0$ gör att gränsvärdet blir 1;
(iii) $a = \ln(7/e)$ och $b = 1$ gör att gränsvärdet blir 0.