

## LISTA ÖVER TRYCKFEL I BLOMQVISTBÖCKERNA

MATEMATIK FÖR TEKNISKT BASÅR: DEL 2 (TREDJE UPPLAGAN)

**Sid 5 – Allra sista raden ska vara:**

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x} \quad \text{med} \quad D_\phi = V_h = V_g = [0, 4] \quad \text{och} \quad V_\phi = D_h = [0, 1].$$

**Sid 30 – Svar till testuppg. 2.6 a):** Svaret skall inte innehålla någon  $N$ . Det är alltså 1,16K.

**Sid 32 – Mellersta formeln strax ovanför Ex.3.1.** ska lyda  $\sin 90^\circ = 1$ .

**Sid 49 – Avsnitt 3.7:** Beviset av formeln  $\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$  är **ofullständigt**. Det bevis som står i boken funkar endast om  $0^\circ < u - v < 180^\circ$ , eftersom  $u - v$  ska vara en av de inre vinklarna i triangeln  $OAB$ .

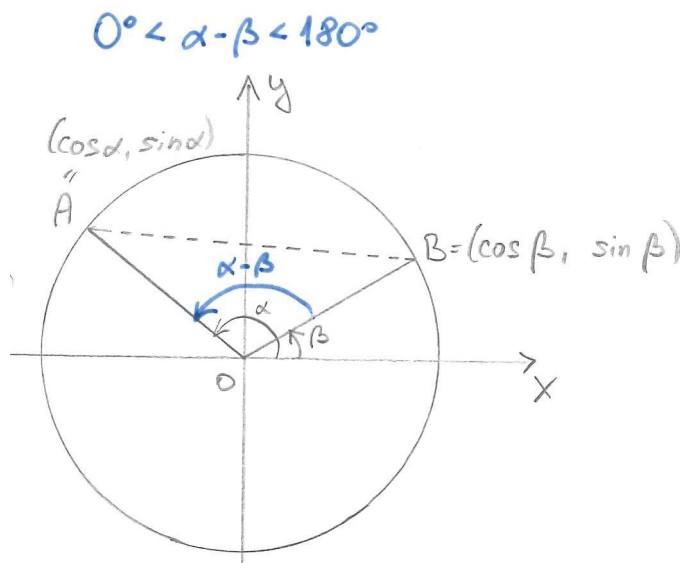
Här kommer ett fullständigt bevis för formeln  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ , där  $\alpha$  och  $\beta$  är godtyckliga vinklar. Det är flera fall som måste diskuteras:

**Fall 1:**  $\alpha - \beta = 0$ . Då får man  $\alpha = \beta$  och

$$VL = \cos(\alpha - \beta) = \cos 0^\circ = 1; \quad HL = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \stackrel{\text{trig:ettan}}{=} 1.$$

Alltså  $VL = HL$  och formeln är bevisat i detta fall.

**Fall 2:**  $0^\circ < \alpha - \beta < 180^\circ$ . I detta fall kan man följa det bevis som står i boken.



Enligt avståndsformeln är

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= (\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \beta - \sin \alpha)^2 \\ &= \cos^2 \beta - 2 \cos \beta \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \beta \sin \alpha + \sin^2 \alpha \\ &= 1 + 1 - 2 \cos \beta \cos \alpha - 2 \sin \beta \sin \alpha = 2 - 2(\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha). \end{aligned}$$

Enligt cosinussatsen i triangeln  $OAB$  är

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA||OB| \cos(\alpha - \beta) = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta) = 2 - 2 \cos(\alpha - \beta).$$

Man har alltså uttryckt  $|AB|^2$  på två olika sätt och så måste dessa två uttryck vara lika:

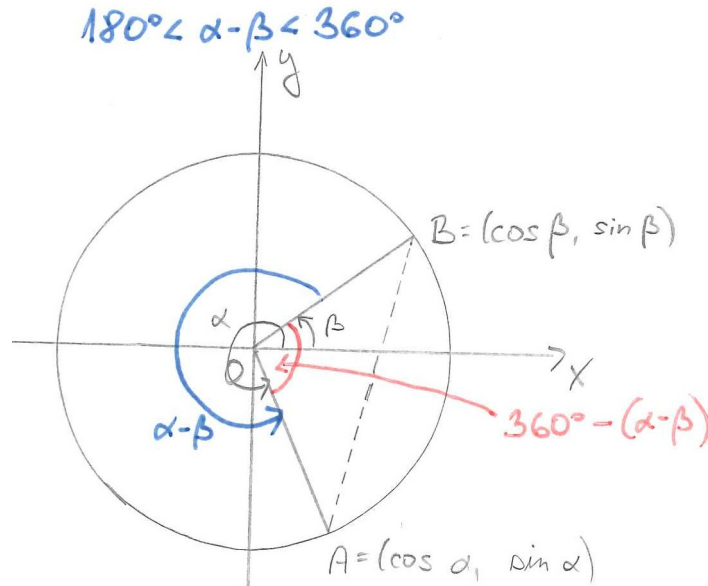
$$|AB|^2 = 2 - 2(\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha) = 2 - 2 \cos(\alpha - \beta) \Leftrightarrow \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha = \cos(\alpha - \beta)$$

och då är man klar med beviset i detta fall.

**Fall 3:**  $\alpha - \beta = 180^\circ$ . Då är  $\alpha = 180^\circ + \beta$  och man får se i enhetscirkeln att  $\cos \alpha = -\cos \beta$  och  $\sin \alpha = -\sin \beta$ . Således

$$VL = \cos(\alpha - \beta) = \cos 180^\circ = -1; \quad HL = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -\cos^2 \beta - \sin^2 \beta \stackrel{\text{trig:ettan}}{=} -1.$$

**Fall 4:**  $180^\circ < \alpha - \beta < 360^\circ$ . I detta fall **behöver man modifiera** det bevis som står i boken.



Enligt avståndsformeln är

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= (\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \beta - \sin \alpha)^2 \\ &= \cos^2 \beta - 2 \cos \beta \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \beta \sin \alpha + \sin^2 \alpha \\ &= 1 + 1 - 2 \cos \beta \cos \alpha - 2 \sin \beta \sin \alpha = 2 - 2(\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha). \end{aligned}$$

Enligt cosinussatsen i triangeln OAB är

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA| |OB| \cos(360^\circ - (\alpha - \beta)) \\ (*) \quad &= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(360^\circ - (\alpha - \beta)) = 2 - 2 \cos(360^\circ - (\alpha - \beta)). \end{aligned}$$

Eftersom  $\cos$  är en jämn funktion som är  $360^\circ$ -periodisk, så är

$$\cos(360^\circ - (\alpha - \beta)) = \cos(-(\alpha - \beta)) = \cos(\alpha - \beta).$$

Då blir ekvationen (\*) förenklad till  $|AB|^2 = 2 - 2 \cos(\alpha - \beta)$ . Nu kan man fortsätta som i Fall 2: Man har uttryckt  $|AB|^2$  på två olika sätt och så måste dessa två uttryck vara lika:

$$|AB|^2 = 2 - 2(\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha) = 2 - 2 \cos(\alpha - \beta) \Leftrightarrow \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha = \cos(\alpha - \beta)$$

och då är man klar med beviset i detta fall.

**Fall 5:**  $\alpha - \beta < 0^\circ$  eller  $\alpha - \beta \geq 360^\circ$ . Man bildar en hjälpvinkel  $\tilde{\alpha}$  genom att addera/subtrahera en lämplig multipel av  $360^\circ$  till vinkeln  $\alpha$  så att  $\tilde{\alpha} - \beta$  hamnar i intervallet  $[0^\circ, 360^\circ)$ . Alltså,  $\tilde{\alpha} = \alpha + k \cdot 360^\circ$ , respektive  $\alpha = \tilde{\alpha} - k \cdot 360^\circ$ , för något heltal  $k$ . Då är  $\sin \tilde{\alpha} = \sin \alpha$  samt  $\cos \tilde{\alpha} = \cos \alpha$  och så

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\tilde{\alpha} - k \cdot 360^\circ - \beta) = \left| \begin{array}{l} \text{cosinus är} \\ 360^\circ\text{-periodisk} \end{array} \right| = \cos(\tilde{\alpha} - \beta) = \left| \begin{array}{l} \text{något av de fyra ovanstående} \\ \text{fallen ty } 0^\circ \leq \tilde{\alpha} - \beta < 360^\circ \end{array} \right| \\ &= \cos \tilde{\alpha} \cos \beta + \sin \tilde{\alpha} \sin \beta = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Nu är man klar (på riktigt) med beviset av formeln  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ .

**Kapitel 4:** Trots att läsaren hänvisas till Appendix flera gånger, så finns det inget om de komplexa talen i appendixet. Ignorera sådana hänvisningar.

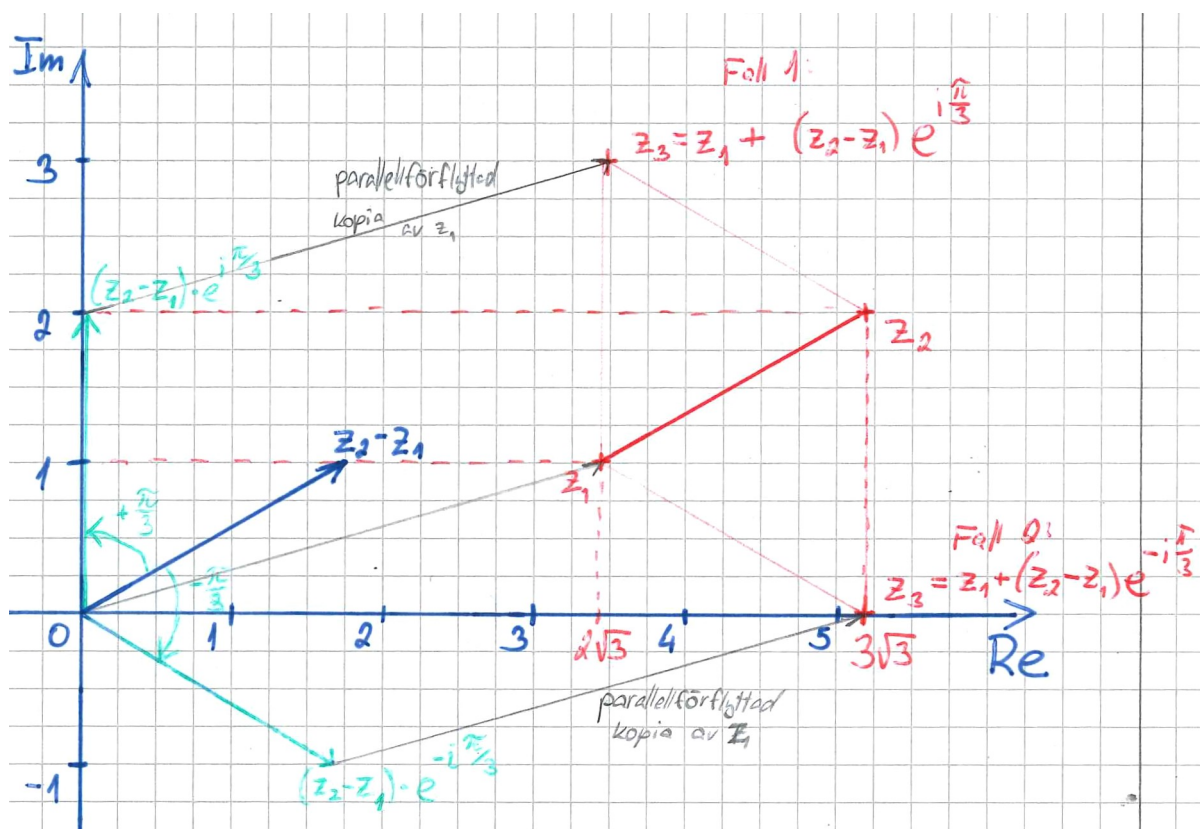
**Kapitel 4:** Den imaginära enheten kan betecknas  $i$  (vilket man brukar göra i matematiken) eller  $j$  (vilket man brukar göra i fysiken, framförallt i ellära, ty bokstaven  $i$  är reserverat för strömmen). I alla fall borde man inte blanda ihop de här beteckningarna. Man borde välja en av dessa bokstäver och hålla fast vid detta val. Tyvärr gör kursboken inte det och man skriver  $i$  och  $j$  nästan slumpmässigt.

**Sid 95 – Exempel 4.18:** När man tar fram skillnaden  $z_2 - z_1$ , så är det inte riktigt den pil som börjar i punkten  $z_1$  och slutar i punkten  $z_2$  utan det är pilens parallellförflyttade kopia som börjar i origo. När man multiplicerar skillnaden  $z_2 - z_1$  med talet  $e^{i\pi/3}$  respektive  $e^{-i\pi/3}$ , så roterar man denna kopia med  $\pm\pi/3$ . Då får man en sträcka som har rätt längd och är korrekt orienterad, men börjar på fel ställe. Nämligen svarar produkten  $(z_2 - z_1)e^{\pm i\pi/3}$  mot (orienterade) sträckan som börjar i origo. För att få talet  $z_3$  så måste man flytta sträckan så att den börjar i punkten  $z_1$ . Det gör man genom att addera  $z_1$ . Svaren är alltså:

$$\begin{aligned} \text{Fall 1: } z_3 &= z_1 + (z_2 - z_1)e^{i\pi/3} = (2\sqrt{3} + i) + 2e^{i\pi/6} \cdot e^{i\pi/3} \\ &= (2\sqrt{3} + i) + 2e^{i(\pi/6+\pi/3)} = (2\sqrt{3} + i) + 2e^{i\pi/2} = (2\sqrt{3} + i) + 2i = 2\sqrt{3} + 3i. \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} \text{Fall 2: } z_3 &= z_1 + (z_2 - z_1)e^{-i\pi/3} = (2\sqrt{3} + i) + 2e^{i\pi/6} \cdot e^{-i\pi/3} \\ &= (2\sqrt{3} + i) + 2e^{i(\pi/6-\pi/3)} = (2\sqrt{3} + i) + 2e^{-i\pi/6} = (2\sqrt{3} + i) + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$



**Sid 109:** Bortse från hänvisningen till appendix. Bevisen för räknelagarna finns inte i kursboken.

**Sid 109 – Räknelagen 5 ska lyda:** Om  $f(x) \leq g(x)$  för alla  $x$  i en punkterad omgivning av det reella talet  $a$ , så är  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ . Det är dock värt att påpeka att man får en icke-sträng olikhet för gränsvärdena även om det råder den stränga olikheten  $f(x) < g(x)$  i den punkterade omgivningen av  $a$ .

**Sid 109 – Räknelagen 6 heter inte instängningsregeln:** Instängningsregeln (också kallad instängnings-satsen) är nämligen ett betydligt starkare påstående. Antag att  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  för alla  $x$  inom en punkterad omgivning av talet  $a \in \mathbb{R}$ . Antag vidare att  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ . Då existerar gränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$  och är lika med det gemensamma gränsvärdet av  $f(x)$  och  $g(x)$  då  $x \rightarrow a$ .

**Sid 357 – Testuppg. 12.10 a) och c):** Identiteterna skall bevisas för alla heltal  $n \geq 2$ .

## MATEMATIK FÖR TEKNISKT BASÅR: DEL 2 ÖVNINGSBOK (ANDRA UPPLAGAN)

**Sid 63 – Räknelagen 6 kallas inte för instängningsregeln:** Se den ovanstående rättningen till sid 109 i huvudboken.

**Sid 148 – Uppg. 10.18 b) skall vara:**  $\int_0^2 \frac{u^5}{u^6 + 6} du.$

**Sid 199 – Svar till 1.3 g) skall vara:** Ej omvändbar. (Om man i fråga 1.2g på sid 7 lägger till villkoret  $x \geq 0$  (står redan  $y \geq 0$ ), så blir det rätt som det nu står i facit på 1.3g.)

**Sid 200 – Svar till 1.5 c) skall vara:**  $f \circ \phi(x) = |x| = x$ , där  $x \geq 0$ ;  $\phi \circ f(x) = x$ , där  $x \geq 1$ .

**Sid 202 – Svar till 3.8 b) och c):** Det borde finnas två olika lösningar beroende på huruvida vinkeln  $v$  är spetsig eller trubbig.

**Sid 206 – Svar till 4.11 b) skall vara:**  $(z - 1 - i)(z - 1 + i)(z - 2 - i)(z - 2 + i).$

**Sid 210 – Svar till 15.4 g) ska vara:** funktionen är inte kontinuerlig i det slutna intervallet  $[3, \infty)$  eftersom den är diskontinuerlig i punkten  $x = 3$ . Däremot kan man säga att funktionen är kontinuerlig i det öppna intervallet  $(3, \infty)$ .

**Sid 229 – Svar till 10.18 b) skall vara:**  $\frac{\ln 70 - \ln 6}{6}$ , alternativt  $\frac{1}{6} \ln\left(\frac{35}{3}\right).$

## MATEMATIK FÖR NATURVETENSKAPLIGT BASÅR OCH TEKNISKT BASÅR: DEL 1 (FÖRSTA UPPLAGAN)

**Sid 14 – Testuppgiften 1.9 ska lyda:** Betrakta utsagan ”Om  $n$  är ett naturligt tal så gäller att  $2n \geq n + 1$ ”. Bevisa att utsagan är falskt.

**Sid 45 – Första tre raderna (dvs. kontroll) ska vara:**

Kontroll ( $E_1$ ):  $VL = 2x + y - z = 2 \cdot 7 + (-3) - 8 = 14 - 3 - 8 = 3 = HL.$

Kontroll ( $E_2$ ):  $VL = 3x + 2y - z = 3 \cdot 7 + 2 \cdot (-3) - 8 = 21 - 6 - 8 = 7 = HL.$

Kontroll ( $E_3$ ):  $VL = 2x - 2y - 3z = 2 \cdot 7 - 2 \cdot (-3) - 3 \cdot 8 = 14 + 6 - 24 = -4 = HL.$

**Sid 63–64, Avsnitt 4.7:** Potenser med rationella exponent, d.v.s.  $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$  där  $p \in \mathbb{Z}$  och  $q \in \mathbb{Z}_+$ , definieras **endast för positiva reella tal  $a$** . Om man inte ställer upp villkoret att  $a > 0$ , så kan potensen vara odefinierad för några värden på  $a$ ,  $p$  och  $q$  (se Exempel 1 nedan). Dessutom skulle potenslagarna inte gälla (se Exempel 2 nedan) och själva definitionen blir problematiskt ty varje rationellt tal kan skrivas som ett bråk på olika sätt (se Exempel 3 nedan).

Exempel 1:

$$(-4)^{1/2} = \left/ \text{enligt def. av potens med rationell exp.} \right/ = \sqrt{-4} = \text{✗}$$

eftersom det inte finns något reellt tal vars kvadrat blir  $-4$ .

Exempel 2:

$$(-4)^{2/4} = \left/ \text{enligt def. av potens med rationell exp.} \right/ = \sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4]{16} = 2.$$

Å andra sidan:

$$(-4)^{2/4} = \left/ \text{enligt potenslagarna ty } \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \cdot 2 \right/ = ((-4)^{1/4})^2 = (\text{✗})^2$$

eftersom det inte finns något reellt tal som upphöjt till 4 ger något negativt tal.

Exempel 3:

$$-3 = (-3)^1 = \left/ 1 = \frac{2}{2} \right/ = (-3)^{2/2} = \left/ \text{enligt def. av potens med rationell exp.} \right/ = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

**Sid 106 – Den mellersta vinkeln i svaret till testuppg. 6.7 ska vara:**  $90^\circ - \arctan 3 \approx 18,4^\circ.$

**Sid 129/130 – Testuppg. 8.6 d):** Om uppgiften vore  $2x^2 - 8x + 8$ , så skulle svaret i facit stämma, alltså  $2(x - 2)^2$ . Om uppgiften är  $2x^2 - 4x + 8$ , så blir kvadratkompletteringen  $2(x - 1)^2 + 6$  eller  $2((x - 1)^2 + 3)$ .

Sid 154 – Svar till testuppg. 10.3 b) ska vara:  $\frac{3a^2 + a}{2}$ , alternativt  $\frac{a \cdot (3a + 1)}{2}$ .

Sid 184 – Lösningförslag till testuppg. 12.5 b) ska vara: Linjen  $y = 3x + 7$  (d.v.s. den från uppg. 12.3b) skär linjen  $x - 1 = \frac{-1}{3}(x - 1)$  i punkten  $(-1, 7; 1, 9)$

Sid 184 – Svar till testuppg. 12.6 b) ska vara:  $\frac{14}{2}\sqrt{2} \text{ le} = 7\sqrt{2} \text{ le}$ . Således ska svaret till 12.6 c) vara:  $A = \frac{1}{2}6\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = 42 \text{ ae}$ .

Sid 193 – Svar till testuppg. 13.3 b) ska vara: Alla  $x$  som uppfyller  $-1 \leq x \leq 0$ .

Sid 215 – Svar till testuppg. 14.3 b) ska vara:  $(0, 1)$  och  $(0, 5)$ .

Sid 215 – Svar till testuppg. 14.4 ( $y$ -axeln) ska vara:  $(0, 9)$