

MVE425: Tekniskt basår – Matematik, del B

Examinator: Lukáš Malý / Thomas Wernstål, tel. 031 - 772 35 57

Telefonvakt: Carl Lundholm, tel. 031 - 772 67 92

Hjälpmedel: Formelblad utdelat med tesen (tryckt på baksidan). Inga miniräknare är tillåtna.

Betygsgränser: För betyg 3 krävs 20 p; för betyg 4 krävs 32 p; för betyg 5 krävs 42 p (utav 50 p).

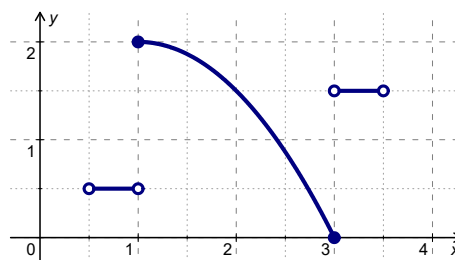
Lösningsförslag kommer att publiceras på kurshemsidan senast nästa arbetsdag.

OBS: Alla svar skall vara väl motiverade. Bristande motivering kommer att orsaka poängavdrag.
Bara svar ger noll poäng!

1. Grafen till funktionen $y = f(x)$ visas i figuren till höger. Genom att läsa av grafen,

(a) bestäm definitionsmängden och värdemängden av funktionen f ; (1p)

(b) avgör om f är omvändbar. Om så är fallet, skissa en graf av inversfunktionen f^{-1} . Men om så inte är fallet, bestäm en lämplig restriktion av f så att den blir omvändbar. (2p)



2. Lös följande ekvationer: (2p + 2p + 3p)

(a) $5 \cdot 11^x = 13 \cdot 7^x$; (b) $(\ln x^2)^2 = 4$; (c) $2 \lg(1 - x) - \lg 2 = \lg(11 - 3x)$.

3. Substansmängden av koppar-62 i ett radioaktivt preparat vid tiden t [minuter] ges av funktionen $n(t) = 300e^{kt}$ [mol] där k är ett givet tal. Vid tiden $t = 14$ minuter är substansmängden $n(t) = 110$ mol. Vad är k ? (Du får svara med logaritmuttryck.) (3p)

4. I fyrhörningen $ABCD$ har sidorna följande längder: $|AB| = 8$ l.e., $|BC| = 3$ l.e., $|CD| = 5$ l.e. och $|DA| = 5$ l.e. Vinkeln i hörnet A är 60° .

(a) Beräkna längden av diagonalen BD . (2p)

(b) Beräkna vinkeln i hörnet C . Svara dels i grader, dels i radianer. (3p)

(c) Beräkna arean av fyrhörningen $ABCD$. (2p)

5. (a) Bevisa en av additions- eller subtraktionsformlerna för sin eller cos. (Välj själv!) (4p)
Du får gärna förutsätta att alla vinklar i formeln är spetsiga.

(b) Bevisa en av additions- eller subtraktionsformlerna för tan eller cot. (Välj själv!) (3p)
Du får gärna använda formelerna för sin och cos utan bevis.

(c) Antag att vinklarna u och v ligger i intervallet $(0^\circ, 90^\circ)$. Visa att om $\tan u = \cot v$, så gäller att $u + v = 90^\circ$. (3p)

Var god vänd!

6. Lös följande komplexa ekvationer: (2p + 4p)

$$(a) 28i + (2 + i)z = 20 + (2 + 3i)\bar{z}, \quad (b) z^2 - (4 + 2i)z + 6 = 0.$$

Svar ska anges i rektangulär form (d.v.s. som $x + iy$, där $x, y \in \mathbb{R}$.)

7. Bestäm realdelen och imaginärdelen av det komplexa talet z då (4p)

$$z = (-\sqrt{3} + i)^4 + \frac{(-1 - i\sqrt{3})^5}{2}.$$

8. Beräkna följande gränsvärden: (2p + 3p)

$$(a) \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sin(9v)}{\tan(5v)}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{27 - x^3}}{\sqrt{16x^2 - 36}}$$

9. Bestäm de reella talen a och b så att funktionen (5p)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - a}{2 - \sqrt{5 - x}} & \text{då } x < 1, \\ 7x + b & \text{då } x \geq 1 \end{cases}$$

blir kontinuerlig i punkten $x = 1$.

Lycka till!

Formler

Additions- och subtraktionsformlerna för de trigonometriska funktionerna

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \beta + \cot \alpha}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad \cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha}$$

Formler för dubbla vinkeln

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \cot(2\alpha) = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$$