

MVE425: Tekniskt basår – Matematik, del B

Uppgift 1. (a) Definitionsmängd är mängden av alla x -värdena i funktionens graf, så $D_f = (\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$. Värdomängd är mängden av alla y -värdena i funktionens graf, så $V_f = [0, 2]$.

(b) Dubbla linjaltestet fallerar då $y = \frac{1}{2}$ eller $y = 3\frac{1}{2}$ och så är f inte omvändbar. Grafens mellersta del klarar dock dubbla linjaltestet och så kommer funktionens restriktion till intervallet $[1, 3]$ vara omvändbar.

Uppgift 2. (a) Dividera båda leden med 7^x och med 5. Därefter logaritmeras ekvationen:

$$5 \cdot 11^x = 13 \cdot 7^x \Leftrightarrow \frac{11^x}{7^x} = \frac{13}{5} \Leftrightarrow \left(\frac{11}{7}\right)^x = \frac{13}{5} \Leftrightarrow x = \log_{11/7}\left(\frac{13}{5}\right)$$

Alternativt kunde man ha använt logaritmfunktionen med en annan bas:

$$\begin{aligned} \left(\frac{11}{7}\right)^x = \frac{13}{5} &\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{11}{7}\right)^x\right) = \ln\left(\frac{13}{5}\right) \Leftrightarrow x \ln\left(\frac{11}{7}\right) = \ln\left(\frac{13}{5}\right) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln(13/5)}{\ln(11/7)} = \frac{\ln 13 - \ln 5}{\ln 11 - \ln 7}. \end{aligned}$$

Anm.: Det går alldeles bra att börja med att logaritmera ekvationen och därefter utnyttja logaritm-lagarna till att lösa ut x :

$$\begin{aligned} 5 \cdot 11^x = 13 \cdot 7^x &\Leftrightarrow \ln(5 \cdot 11^x) = \ln(13 \cdot 7^x) \Leftrightarrow \ln 5 + \ln 11^x = \ln 13 + \ln 7^x \\ &\Leftrightarrow \ln 5 + x \ln 11 = \ln 13 + x \ln 7 \Leftrightarrow x(\ln 11 - \ln 7) = \ln 13 - \ln 5 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln 13 - \ln 5}{\ln 11 - \ln 7} = \frac{\ln(13/5)}{\ln(11/7)} = \log_{11/7}\left(\frac{13}{5}\right). \end{aligned}$$

(b) Eftersom ekvationen $A^2 = B$ löses av $A = \pm\sqrt{B}$ då $B \geq 0$, får man totalt fyra lösningar:

$$(\ln x^2)^2 = 4 \Leftrightarrow \ln x^2 = \pm 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = e^2 \\ \text{eller} \\ x^2 = e^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm e \\ \text{eller} \\ x = \pm e^{-1} \end{cases}$$

(c) Förenkla uttrycken m.h.a. logaritm-lagarna och sedan utnyttja omvändbarheten av $\lg$:

$$\begin{aligned} 2 \lg(1-x) - \lg 2 &= \lg(11-3x) \Rightarrow \lg\left(\frac{(1-x)^2}{2}\right) = \lg(11-3x) \Leftrightarrow \frac{(1-x)^2}{2} = 11-3x \\ &\Leftrightarrow (1-x)^2 = 22-6x \Leftrightarrow 1-2x+x^2 = 22-6x \Leftrightarrow x^2+4x-21=0 \\ &\Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{2^2+21} = -2 \pm \sqrt{25} = -2 \pm 5 = 3 \text{ eller } -7. \end{aligned}$$

Ekvivalens behöver inte råda i första steget ovan och så krävs en kontroll av de funna rötterna:

$x = 3$: $VL = 2 \lg(1-3) - \lg 2 = 2 \lg(-2) - \lg 2 = \text{odefinierat!}$ Således är $x = 3$ en falsk rot!

$x = -7$: $VL = 2 \lg(1-(-7)) - \lg 2 = 2 \lg 8 - \lg 2 = \lg 8^2 - \lg 2 = \lg(64/2) = \lg 32$

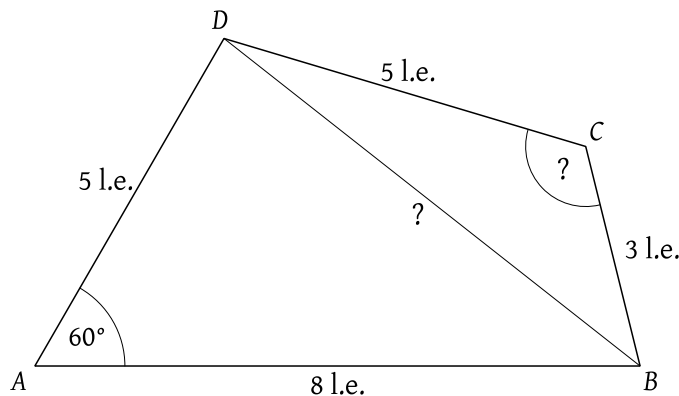
$$HL = \lg(11-3(-7)) = \lg(11+21) = \lg 32. \quad VL = HL.$$

Svar: Ekvationen har endast en lösning, nämligen $x = -7$.

Uppgift 3. Enligt uppgiften är $n(14) = 110$, vilket ger oss ekvationen

$$300e^{k \cdot 14} = 110 \Leftrightarrow e^{14k} = \frac{11}{30} \Leftrightarrow 14k = \ln\left(\frac{11}{30}\right) \Leftrightarrow k = \frac{\ln(11/30)}{14} = \frac{\ln 11 - \ln 30}{14}.$$

Uppgift 4. Börja med att skissa fyrhörningen:



(a) Diagonalen BD bestäms m.h.a. cosinussatsen $|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2|AB| |AD| \cos \alpha$:

$$|BD|^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 64 + 25 - 80 \cdot \frac{1}{2} = 89 - 40 = 49 \Rightarrow |BD| = 7 \text{ l.e.}$$

(b) Vinkeln i hörnet C bestäms m.h.a. cosinussatsen $|BD|^2 = |CB|^2 + |CD|^2 - 2|CB| |CD| \cos \gamma$:

$$7^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos \gamma \Leftrightarrow \frac{15}{-30} = \cos \gamma \Leftrightarrow \cos \gamma = \frac{-1}{2} \Rightarrow \gamma = 120^\circ = \frac{2}{3}\pi.$$

(c) Fyrhörningens area är summan av areorna av trianglarna ABD och BCD . Trianglarnas areor bestäms m.h.a. areasatsen

$$\begin{aligned} A_{\triangle ABD} &= \frac{|AB| |AD| \sin \alpha}{2} = \frac{8 \cdot 5 \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{40}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{40\sqrt{3}}{4} \text{ a.e.} \\ A_{\triangle BCD} &= \frac{|CB| |CD| \sin \gamma}{2} = \frac{3 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{15}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4} \text{ a.e.} \\ A_{ABCD} &= A_{\triangle ABD} + A_{\triangle BCD} = \frac{40\sqrt{3}}{4} + \frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{55\sqrt{3}}{4} \text{ a.e.} \end{aligned}$$

Uppgift 5. (a) och (b) Se Avsnitt 3.7 i kursboken eller se alternativa bevis på kurshemsidan på <http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve425b/1819/#Extramaterial>

(c) Först skriver man om $\tan$ och $\cot$ som kvoter mellan $\sin$ och $\cos$. Därefter kommer korsmultiplikering i ekvationen ge att

$$\begin{aligned} \tan u = \cot v &\Leftrightarrow \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{\cos v}{\sin v} \Leftrightarrow \sin u \sin v = \cos u \cos v \\ &\Leftrightarrow 0 = \cos u \cos v - \sin u \sin v \\ &\Leftrightarrow 0 = \cos(u + v) \Leftrightarrow u + v = 90^\circ + k \cdot 180^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Eftersom båda vinklarna u och v är spetsiga (positiva), så måste deras summa ligga i intervallet $(0^\circ, 180^\circ)$. Det enda möjliga värdet på $k \in \mathbb{Z}$ är alltså $k = 0$ för annars hamnar vinkeln $u + v$ utanför intervallet. Således är $u + v = 90^\circ + 0 \cdot 180^\circ = 90^\circ$. V.S.B.

Uppgift 6. (a) Ansätt $z = x + iy$ där $x, y \in \mathbb{R}$, så $\bar{z} = x - iy$. Då blir den givna ekvationen

$$\begin{aligned} 28i + (2 + i)(x + iy) &= 20 + (2 + 3i)(x - iy) \\ \Leftrightarrow 28i + 2x + ix + i2y - y &= 20 + 2x + i3x - i2y + 3y \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 20 + 2x + 3y & (\text{Re}) \\ 28 + x + 2y = 3x - 2y & (\text{Im}) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -4y = 20 \\ 2x = 28 + 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -5 \\ x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Svar: $z = 4 - 5i$.

(b) Man börjar med att kvadratkomplettera VL.

$$\begin{aligned} z^2 - (4 + 2i)z + 6 &= 0 \Leftrightarrow \underbrace{z^2 - 2(2 + i)z + (2 + i)^2}_{=(z - (2 + i))^2} - (2 + i)^2 + 6 = 0 \\ \Leftrightarrow (z - 2 - i)^2 &= \underbrace{(2 + i)^2}_{=3+4i} - 6 \Leftrightarrow \underbrace{(z - 2 - i)^2}_{=:w} = -3 + 4i. \end{aligned}$$

Nu behöver man lösa ekvationen $w^2 = -3 + 4i$. Ansätt $w = u + iv$, där u och v är reella tal. Då blir

$$(u + iv)^2 = -3 + 4i \Leftrightarrow u^2 + 2iuv - v^2 = -3 + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = -3 & (\text{Re}) \\ 2uv = 4 & (\text{Im}) \end{cases}$$

Man kan lägga till en tredje ekvation genom att beräkna absolutbeloppen av båda leden:

$$u^2 + v^2 = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 \quad (\text{Abs})$$

(Re) + (Abs) ger $2u^2 = -3 + 5 = 2$ och så $u^2 = 1$, d.v.s., $u = \pm 1$. Från ekvationen (Im) får man att $v = 2/u = 2/\pm 1 = \pm 2$. Vi har alltså fått två lösningar:

$$\begin{aligned} z_1 - 2 - i = w_1 &= 1 + 2i \Leftrightarrow z_1 = 3 + 3i \quad \text{och} \\ z_2 - 2 - i = w_2 &= -1 - 2i \Leftrightarrow z_2 = 1 - i. \end{aligned}$$

Svar: Ekvationen löses av $z_1 = 3 + 3i$ och $z_2 = 1 - i$.

Uppgift 7. Fjärde resp. femte potensen kan lätt beräknas genom att först uttrycka de komplexa talen i parenteserna på polär form:

$$\begin{aligned} |-\sqrt{3} + i| &= \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 \quad \text{och så} \quad -\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right) \\ |-1 - i\sqrt{3}| &= \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2 \quad \text{och så} \quad -1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{-1}{2} + i\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Nu kan man förenkla talet z m.h.a. Moivres formel,

$$\begin{aligned} z &= (-\sqrt{3} + i)^4 + \frac{(-1 - i\sqrt{3})^5}{2} = (2e^{i5\pi/6})^4 + \frac{(2e^{i4\pi/3})^5}{2} = 2^4 e^{i10\pi/3} + \frac{2^5 e^{i20\pi/3}}{2} \\ &= 16e^{-2\pi/3} + 16e^{2\pi/3} = 16\left(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 16\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -16 \end{aligned}$$

Svar: $\text{Re } z = -16$, $\text{Im } z = 0$.

Uppgift 8.

$$(a) \quad \frac{\sin(9v)}{\tan(5v)} = \frac{\sin(9v)}{\frac{\sin(5v)}{\cos(5v)}} = \cos(5v) \cdot \frac{\sin(9v)}{\sin(5v)} = \cos(5v) \cdot \frac{\frac{\sin(9v)}{9v} \cdot 9}{\frac{\sin(5v)}{5v} \cdot 5} = \frac{9 \cos(5v)}{5} \cdot \frac{\frac{\sin(9v)}{9v}}{\frac{\sin(5v)}{5v}}.$$

Enligt räknereglerna för gränsvärden blir

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sin(9v)}{\tan(5v)} = \frac{9 \lim_{v \rightarrow 0} \cos(5v)}{5} \cdot \frac{\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sin(9v)}{9v}}{\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\sin(5v)}{5v}} = \frac{9 \cos(5 \cdot 0)}{5} \cdot \frac{1}{1} = \frac{9}{5},$$

där man utnyttjade kontinuiteten av cos-funktionen samt standardgränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ med $x = 9v$ respektive $x = 5v$.

$$(b) \quad \frac{\sqrt[3]{27-x^3}}{\sqrt{16x^2-36}} = \frac{x \cdot \sqrt[3]{27x^{-3}-1}}{|x| \cdot \sqrt{16-36x^{-2}}} = \left| x > 0 \text{ då } x \rightarrow \infty \right| \Rightarrow |x| = x \quad \left| = \frac{\sqrt[3]{27x^{-3}-1}}{\sqrt{16-36x^{-2}}}.$$

Eftersom både kvadrat- och kubikroten är kontinuerliga på sina definitionsmängder, så får man att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{27-x^3}}{\sqrt{16x^2-36}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{27x^{-3}-1}}{\sqrt{16-36x^{-2}}} = \frac{\sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow \infty} 27x^{-3}-1}}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} 16-36x^{-2}}} = \frac{\sqrt[3]{27 \cdot 0-1}}{\sqrt{16-36 \cdot 0}} = \frac{\sqrt[3]{-1}}{\sqrt{16}} = \frac{-1}{4}.$$

Uppgift 9. Man ska hitta talen a och b sådana att:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x).$$

När man provar bestämma vänstergränsvärdet, så får man att

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-a}{2-\sqrt{5-x}} = \frac{1-a}{2-\sqrt{5-1^-}} = \frac{1-a}{2-\sqrt{4^+}} = \frac{1-a}{0^-}.$$

Det innebär att a måste vara lika med 1 om det skall finnas någon chans att vänstergränsvärdet existerar (ändligt).

Låt $a = 1$ så att man på riktigt kan beräkna vänstergränsvärdet. Man börjar med att förlänga bråket med nämnarens konjugat:

$$\frac{x-1}{2-\sqrt{5-x}} \cdot \frac{2+\sqrt{5-x}}{2+\sqrt{5-x}} = \frac{(x-1)(2+\sqrt{5-x})}{2^2-(5-x)} = \frac{(x-1)(2+\sqrt{5-x})}{x-1} = 2+\sqrt{5-x}.$$

Således

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{2-\sqrt{5-x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2+\sqrt{5-x}) = 2+\sqrt{5-1} = 2+\sqrt{4} = 2+2 = 4.$$

Nu behöver man undersöka högergränsvärdet vid punkten $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (7x+b) = 7 \cdot 1 + b = 7+b,$$

vilket är lika med funktionsvärdet $f(1)$.

När de ensidiga gränsvärdena sätts in i kontinuitetsvillkoret, så tar man reda på värdet på b :

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)}_{=4} = \underbrace{f(1)}_{=7+b} = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)}_{=7+b} \Leftrightarrow 4 = 7+b \Leftrightarrow b = -3.$$

Svar: $a = 1$ och $b = -3$.